

文章编号:1004-1478(2011)01-0070-04

# 一个新混沌系统的修正函数投影同步

方洁<sup>1,2</sup>, 谢泽会<sup>1</sup>, 王红英<sup>3</sup>

(1. 郑州轻工业学院 电气信息工程学院, 河南 郑州 450002;

2. 南京航空航天大学 自动化学院, 江苏 南京 210016;

3. 郑州大学 马克思主义学院, 河南 郑州 450001)

**摘要:**改变 Liu 临界混沌系统的二次项符号, 得到其反结构形式的数学模型, 分析该反结构系统的平衡点、耗散性和 Lyapunov 指数, 揭示了其混沌特性. 基于线性系统的稳定性判定准则, 对新混沌系统进行适当的线性分离, 实现了该自治混沌系统的修正函数投影同步. 仿真实验证明了该方法的可行性和有效性.

**关键词:**新混沌系统; Lyapunov 指数; 线性分离; 修正函数投影同步

**中图分类号:** TP273

**文献标志码:** A

## Modified function projective synchronization of a new chaotic system

FANG Jie<sup>1,2</sup>, XIE Ze-hui<sup>1</sup>, WANG Hong-ying<sup>3</sup>

(1. College of Electr. and Infor. Eng., Zhengzhou Univ. of Light Ind., Zhengzhou 450002, China;

2. College of Auto., Nanjing Univ. of Aero. and Astro., Nanjing 210016, China;

3. School of Marxism, Zhengzhou Univ., Zhengzhou 450001, China)

**Abstract:** A new chaotic system was constructed by changing the sign of the quadratic terms of the Liu chaotic system. Existence of chaotic behaviors was proved by Lyapunov exponents, equilibriums and dissipation. Based on the stability criterion of linear system, switched function projective synchronization was achieved by appropriate linear separation method. The feasibility and validity of this method were verified through numerical simulation.

**Key words:** new chaotic system; Lyapunov exponent; linear separation; modified function projective synchronization

## 0 引言

混沌是自然界中普遍存在的现象, 是非线性动力学系统特有的一种复杂运动形式. 自从 Lorenz 混沌吸引子被发现后, 该领域掀起了一股揭示混沌现

象, 进而控制、利用混沌的热潮<sup>[1-2]</sup>.

混沌同步是混沌学研究领域的一个重要方向, 由于其在保密、通信等领域具有潜在应用价值而备受关注. 目前已有的同步方案包括完全同步、相同步、互同步、滞后同步、广义同步、投影同步、修正投影同步等.

收稿日期: 2010-09-10

基金项目: 国家自然科学基金项目(90716028)

作者简介: 方洁(1981—), 女, 河南省南阳市人, 郑州轻工业学院讲师, 南京航空航天大学博士研究生, 主要研究方向为非线性控制.

最近,文献[3-4]又提出了一种新的同步方案,即函数投影同步.较之投影同步,函数投影同步的驱动、响应系统被同步到一个期望的函数比例因子,而不是常量.修正函数投影同步的各函数比例因子可以互不相同,它是函数投影同步的推广.由于函数尺度因子具有不确定性,所以修正函数投影同步在应用于保密通信时具有更高的安全性.近年来,对修正函数投影同步的研究取得了大量的成果<sup>[5-7]</sup>.此外,文献[8]基于线性系统的稳定判定准则,提出了一种基于线性分离、对部分线性混沌系统的混沌投影同步方法.并以Lorenz系统、Rossler系统和超混沌Chen系统为例进行了仿真实验.文献[9]采用该方法实现了一个五维超混沌系统的投影同步.

基于以上研究成果,本文拟以Liu混沌系统<sup>[10]</sup>为参考,通过改变Liu混沌系统二次项的符号得到一个新系统,在分析其平衡点、耗散性和Lyapunov指数特性的基础上,揭示其混沌特性<sup>[11-12]</sup>;然后以新混沌系统为研究对象,将线性分离方法和修正函数投影同步相结合,以期实现该系统与其耦合系统的修正函数投影同步.

## 1 新混沌系统的构建及混沌特性分析

### 1.1 新混沌系统的数学模型

Liu混沌系统是一类含有平方非线性项的混沌系统,其状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 = bx_1 + kx_1x_3 \\ \dot{x}_3 = -cx_3 + hx_1^2 \end{cases} \quad (1)$$

当 $a=10, b=40, c=2.5, k=1, h=4$ 时,其动力学分析见文献[1].改变方程①二次项前面的符号,得到Liu系统的反结构形式

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 = bx_1 + kx_1x_3 \\ \dot{x}_3 = -cx_3 - hx_1^2 \end{cases} \quad (2)$$

仍选 $a=10, b=40, c=2.5, k=1, h=4$ ,可计算得到系统②的Lyapunov指数 $\lambda_{L_1}=1.626\ 12, \lambda_{L_2}=0, \lambda_{L_3}=14.126\ 4$ .进而可得Lyapunov维数

$$D_L = j + \frac{1}{|\lambda_{L_{j+1}}|} \sum_{i=1}^j \lambda_{L_i} = 2 + \frac{\lambda_{L_1} + \lambda_{L_2}}{|\lambda_{L_3}|} = 2 + \frac{1.626\ 12 + 0}{|-14.126\ 4|} = 2.115$$

由此可见,系统②的Lyapunov维数是分数维

的,因而这是一个三维混沌动力学系统.

### 1.2 平衡点分析

为求出系统②的平衡点,令

$$\begin{cases} a(x_2 - x_1) = 0 \\ bx_1 + kx_1x_3 = 0 \\ -cx_3 - hx_1^2 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

则得到临界系统的反结构形式的3个平衡点,即 $O(0,0,0), P^+(5,5,-40), P^-(-5,-5,-40)$ .

在 $O(0,0,0)$ 平衡点,对系统②进行线性化,得其雅可比矩阵为

$$J_0 = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ b+kx_3 & 0 & kx_1 \\ -2hx_1 & 0 & -c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 40 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2.5 \end{bmatrix}$$

令 $|\lambda I - J_0| = 0$ ,得相应的特征根为 $\lambda_1 = -25.615\ 5, \lambda_2 = 15.615\ 5, \lambda_3 = -2.5$ . $\lambda_1$ 和 $\lambda_3$ 是负值,而 $\lambda_2$ 是正值,这表明平衡点 $O(0,0,0)$ 是一个不稳定的鞍点.在平衡点 $P^+$ 处,对系统②进行线性化,得其雅可比矩阵为

$$J_+ = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ b+kx_3 & 0 & kx_1 \\ -2hx_1 & 0 & -c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ -40 & 0 & -2.5 \end{bmatrix}$$

令 $|\lambda I - J_+| = 0$ ,得相应的特征根为 $\lambda_1 = -17.561\ 4, \lambda_2 = 2.530\ 7 + j10.367\ 3, \lambda_3 = 2.530\ 7 - j10.367\ 3$ .特征值 $\lambda_1$ 是负值,而 $\lambda_2$ 和 $\lambda_3$ 是一对具有正实部的复共轭特征值,这表明平衡点 $P^+$ 是一个不稳定的鞍焦点.在平衡点 $P^-$ 处,对系统②进行线性化,得其雅可比矩阵为

$$J_- = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \\ 40 & 0 & -2.5 \end{bmatrix}$$

令 $|\lambda I - J_-| = 0$ ,得相应的特征根为 $\lambda_1 = -17.561\ 4, \lambda_2 = 2.530\ 7 + j10.367\ 3, \lambda_3 = 2.530\ 7 - j10.367\ 3$ ,这表明平衡点 $P^-$ 也是一个不稳定的鞍焦点.若选 $(x_{10}, x_{20}, x_{30}) = (2, 5, 8)$ 为系统的初始值,则其混沌吸引子三维相图如图1所示.

### 1.3 系统的耗散性

对系统②,其流的散度为

$$\nabla V = \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_3} = -a - c = p$$

即 $p = -(a+c) = -12.5$ ,可见系统②是一个三维耗散非线性系统.其轨道随着时间 $t \rightarrow \infty$ 而不断演化,最终限制在一个不变的吸引子集合中.

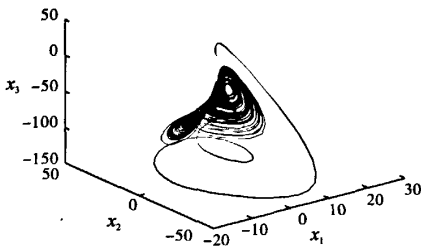


图1 新混沌系统的混沌吸引子的三维相图

### 2 修正函数投影同步描述

考虑如下耦合的 2 个非线性混沌系统:

$$\dot{x} = F(x) \tag{4}$$

$$\dot{y} = G(x, y) \tag{5}$$

其中,  $x, y \in R^n$ , 是状态向量;  $F, G$  为  $R^n \rightarrow R^n$  的可微函数. ④式为驱动系统, ⑤式为响应系统. 误差系统定义为

$$e = x - \Lambda(t)y \tag{6}$$

其中,  $\Lambda(t) = \text{diag}(a_1(t), a_2(t), \dots, a_n(t))$ , 为函数尺度因子矩阵,  $a_i(t)$  为函数比例因子, 是连续可微的有界函数, 且对于所有  $t, a_i \neq 0$ .

定义 对驱动系统④和响应系统⑤, 如果存在函数尺度因子矩阵  $\Lambda(t) = \text{diag}(a_1(t), a_2(t), \dots, a_n(t))$ ,  $a_i(t) \neq 0$ , 使得从不同初值  $(x_0, y_0)$  出发的系统满足  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|x - \Lambda(t)y\| = 0$ , 则系统④和⑤可实现修正函数投影同步. 特别地, 当  $a_1(t) = a_2(t) = \dots = a_n(t)$  时, 为函数投影同步.

### 3 新混沌系统的修正函数投影同步实现

#### 3.1 理论分析

依据文献[11]提出的线性分离方法, 将新混沌系统②进行如下分解

$$\dot{x} = F(x) = \begin{bmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ax_2 \\ bx_1 + kx_1x_3 + x_2 \\ -hx_1^2 \end{bmatrix} = Ax + h(x, t) \tag{7}$$

其中,  $A$  是常满雅矩阵, 有负的特征值;  $h(x, t)$  为非线性部分. 构造出的新耦合响应系统为

$$\dot{y} = Ay + \frac{F(x) - h(x, t)}{a_i(t)} =$$

$$\begin{bmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{ax_2}{a_1(t)} \\ \frac{bx_1 + kx_1x_3 + x_2}{a_2(t)} \\ \frac{-hx_1^2}{a_3(t)} \end{bmatrix} \tag{8}$$

系统⑧的参数与系统②相同. 当函数比例因子分别为  $a_1(t) = -3 + 0.02\sin(t)$ ,  $a_2(t) = -2 + 0.03\cos(2t)$ ,  $a_3(t) = 2 + 0.01\sin(2\pi t/10)$  时, 响应系统⑧的三维相图如图 2 所示. 由图 2 可知, 系统⑧具有与系统②相似的混沌吸引子.

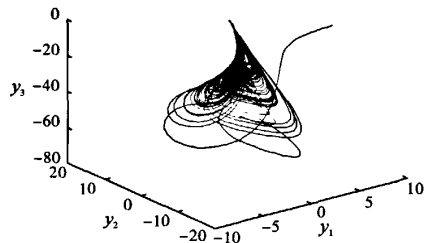


图2 耦合系统的混沌吸引子三维相图

定义系统⑦与系统⑧之间的修正函数投影同步误差为

$$e_i = x_i - a_i y_i \quad i = 1, 2, 3 \tag{9}$$

其中  $a_i(t)$  为对应状态变量的函数比例因子, 是连续可微的有界函数, 且对所有时间  $t$  都不为 0. 将式⑦⑧代入式⑨可得误差动力系统

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -ax_1 + ax_2 - a_1(t)[-ay_1 + ax_2/a_1(t)] = -ae_1 \\ \dot{e}_2 = -x_2 + bx_1 + kx_1x_3 + x_2 - a_2(t)[-y_2 + (bx_1 + kx_1x_3 + x_2)/a_2(t)] = -e_2 \\ \dot{e}_3 = -cx_3 - hx_1^2 - a_3(t)[-cy_3 - hx_1^2/a_3(t)] = -ce_3 \end{cases} \tag{10}$$

由⑩式可知, 误差系统的特征根为  $-a, -1, -c$ . 由线性微分方程的稳定性理论可知, 当时间  $t$  趋于无穷时, 误差系统⑨是渐进稳定的, 即有  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ , 也就是说系统⑦与系统⑧按照预先给定的函数比例因子  $a_i(t)$  实现了修正函数投影同步.

#### 3.2 仿真实验

采用四阶龙格库塔法进行数值仿真, 选参数  $a = 10, b = 40, c = 2.5, k = 1, h = 4$ , 仿真步长为 0.01. 设系统⑦和系统⑧的初值分别为  $(1, 2, 1)$  和  $(-8, -5, 5)$ , 函数比例因子分别为  $a_1(t) = -3 + 0.02\sin(t)$ ,  $a_2(t) = -2 + 0.03\cos(2t)$ ,  $a_3(t) = 2 + 0.01\sin(2\pi t/10)$ . 图 3 为驱动系统和响应系统的状

态轨迹. 图 4 为同步误差曲线.

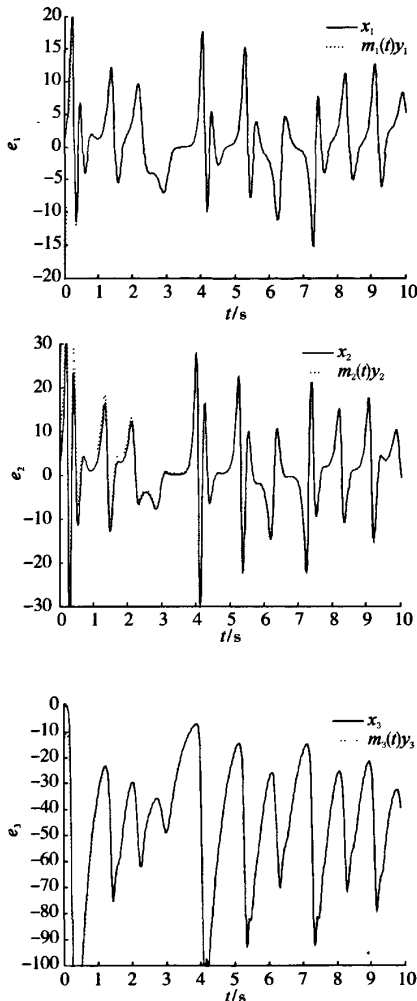


图 3 驱动系统和响应系统的状态轨迹

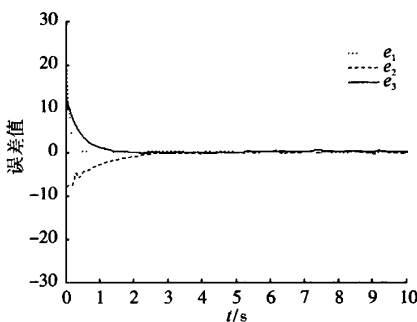


图 4 同步误差  $e_1, e_2, e_3$  随时间演化曲线

由仿真结果可以看出,任意选择初值并设定合适的函数比例因子,误差变量  $e_1, e_2, e_3$  都能经过短暂的时间序列稳定在零点附近. 即响应系统的轨迹

能按照设定的各函数比例因子跟踪驱动系统,从而实现修正函数投影同步.

## 4 结论

本文对一类新混沌系统进行了研究,通过分析其 Lyapunov 指数、平衡点和耗散性,证实了其混沌特性. 基于线性系统的稳定判定准则,通过对该系统进行适当的线性分离,构造了耦合响应系统,并实现了驱动 - 响应耦合系统之间的修正函数投影同步,使驱动 - 响应系统之间按照给定的有界尺度函数  $a_i(t) (i=1, 2, 3)$  演化. 该方法简单可行,不需要设计 Lyapunov 函数,对初值也没有限制,具有较强的鲁棒性. 下一步的研究工作是考虑将该方法应用于基于修正函数投影同步的保密通信.

## 参考文献:

- [1] 刘崇新. 非线性电路理论及应用 [M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2007: 219 - 237.
- [2] 罗晓曙. 混沌控制、同步的理论及方法及其应用 [M]. 桂林: 广西师范大学出版社, 2007: 21 - 26.
- [3] 唐新华, 陆君安, 张伟伟. 基于反步法的混沌系统函数投影同步 [J]. 动力学与控制学报, 2007, 5(3): 216.
- [4] Du H Y, Zeng Q S, Wang C H. Function projective synchronization of different chaotic systems with uncertain parameters [J]. Physics Letters A, 2008, 372(33): 5402.
- [5] 孙克辉, 丘水生, 尹林子. 混沌系统的自适应函数投影同步与参数辨识 [J]. 信息与控制, 2010, 39(3): 326.
- [6] Sebastian Sudheer K, Sabir M. Adaptive modified function projective synchronization between hyperchaotic Lorenz system and hyperchaotic Liu system with uncertain parameters [J]. Physics Letters A, 2009, 373(21): 3743.
- [7] Du Hongyue, Zeng Qingshuang, Wang Changhong. Modified function projective synchronization of chaotic system [J]. Chaos Solitons and Fractals, 2009, 42(2): 2399.
- [8] 王兴元, 王勇. 基于线性分离的自治混沌系统的投影同步 [J]. 物理学报, 2007, 56(5): 2498.
- [9] 李华青, 罗小华, 代祥光. 一个超混沌系统及其投影同步 [J]. 电子学报, 2009, 37(3): 654.
- [10] Wang Fa-qiang, Liu Chong-xin. Studies on Liu chaotic system and its experimental confirmation [J]. Acta Physica Sinica, 2006, 55(10): 5061.
- [11] 张宇辉, 齐国元, 刘文良, 等. 一个新的四维混沌系统理论分析与电路实现 [J]. 物理学报, 2006, 55(7): 3307.
- [12] 刘明华, 冯久超. 一个新的超混沌系统 [J]. 物理学报, 2009, 58(7): 4457.