文章编号:1004-1478(2012)04-0094-04

具有时滞与饱和发生率的脉冲接种模型的研究

卢金梅

(郑州轻工业学院 数学与信息科学系, 河南 郑州 450002)

摘要:研究了一类具有时滞与饱和发生率的SIR脉冲接种模型,利用频闪映射得到了模型的无病周期解,进而利用比较原理给出了无病周期解全局稳定的条件及疾病控制的最大接种周期τ_{max},当接种周期$\tau<\tau_{max}$时,理论上疾病可以被根除.该脉冲接种模型相比较传统的接种模型,所需成本更低,且更加有效.

关键词:饱和发生率;时滞;脉冲接种模型;传染病控制预防策略

中图分类号:O175.13 **文献标志码**:A DOI:10.3969/j.issn.1004-1478.2012.04.024

Study on a pulse vaccination model with delay and saturation incidence

LU Jin-mei

(*Dept. of Infor. and Comp. Sci.*, *Zhengzhou Univ. of Light Ind.*, *Zhengzhou* 450002, *China*)

Abstract: A delay SIR pulse vaccination model with saturation incidence was studied. The periodic infection-free solution of the epidemic model by using stroboscopic map was obtained. Further, using floquet theorem and comparison theorem it was proved that the periodic infection-free solution was globally attractive under appreciation conditions. In order to eradicate the disease by pulse vaccination, the maximum vaccination period max was shown. Theoretical results showed that pulse vaccination was more effective than conventional strategies in leading to disease eradication at relatively low values of vaccination.

Key words: saturation incidence; delay; pulse vaccination model; infectious disease control and prevention strategies

0 引言

人类的健康可能受到各种突发传染病的危害,因此,设计和实施更加有效的控制预防策略非常重要.脉冲接种是一种有效的疾病控制方式,在控制儿童传染病(如麻疹、脊髓灰质炎等)方面成效显著[1-3]. Z. Agur等[4]为脉冲接种的行为机制制定了基本规则.文献[4-5]研究表明在根除疾病方面,脉冲接种策略比传统接种方式更加节约成本.

自然界的许多传染病都具有染病期,即易感人群染病后疾病的发展要持续一段时间,只有经历了这段时间才可恢复健康.这是一种必须用时滞来模拟的滞后现象.另外,我们的生活环境并非齐次,用非线性形式描述疾病的发生率更合适.文献[6-7]讨论了3种疾病发生率的传染病模型,通过参数的合理选择避免疾病发生率的无限增大.所以,采用饱和发生率的脉冲接种模型来刻画疾病的流行规律更加符合客观实际.本文拟通过对时滞与饱和发

收稿日期:2011-11-01

基金项目:河南省科技计划项目(112300410156);郑州轻工业学院青年科研基金项目(2010XJJ019)

作者简介:卢金梅(1978—),女,河南省新乡县人,郑州轻工业学院讲师,硕士,主要研究方向为生物数学.

生率模型的研究，从理论上建立起疾病根除的条件，从而为传染病的预防控制研究提供参考.

1　模型的建立

本文所研究的人群分为易感者、染病者和恢复者 3 类，$S(t)$，$I(t)$，$R(t)$ 分别表示其在时刻 t 所占的比例. 假设人群的数量处于平衡状态，即 $S(t)+I(t)+R(t)=1$，并且对模型作如下假设：

(H_1) 疾病的发生率为饱和发生率 $\beta S/(1+\alpha S)$，β 是接触率，α 是饱和发生率系数；(H_2) 出生率和死亡率相等，都为 μ；(H_3) 考虑垂直传染的情况，由染病母亲传染给后代的比例为 q；(H_4) 时滞 ω 表示疾病的感染期限；(H_5) 假设脉冲接种的周期为 τ 年，$p(0<p<1)$ 表示成功接种的比例.

基于上述假设，笔者提出时滞饱和发生率 SIR 脉冲传染病模型如下：

$$\begin{cases}\left.\begin{aligned}&\dot S(t)=-\beta\frac{S(t)I(t)}{1+\alpha S(t)}+\mu(1-S(t))-(1-q)\mu I(t)\\&\dot I(t)=\beta\frac{S(t)I(t)}{1+\alpha S(t)}-\beta e^{-\mu\omega}\frac{S(t-\omega)I(t-\omega)}{1+\alpha S(t-\omega)}-q\mu I(t)\\&\dot R(t)=\beta e^{-\mu\omega}\frac{S(t-\omega)I(t-\omega)}{1+\alpha S(t-\omega)}-\mu R(t)\end{aligned}\right\}\quad t\neq k\tau\\\left.\begin{aligned}&S(t^+)=(1-p)S(t)\\&I(t^+)=I(t)\\&R(t^+)=R(t)+pS(t)\end{aligned}\right\}\quad t=k\tau\end{cases}\qquad ①$$

其中，所有的系数都是正常数，k 是正整数.

由于模型①的前 2 个方程不含 $R(t)$，所以可以将模型①简化为

$$\begin{cases}\left.\begin{aligned}&\dot S(t)=-\beta\frac{S(t)I(t)}{1+\alpha S(t)}+\mu(1-S(t))-(1-q)\mu I(t)\\&\dot I(t)=\beta\frac{S(t)I(t)}{1+\alpha S(t)}-\beta e^{-\mu\omega}\frac{S(t-\omega)I(t-\omega)}{1+\alpha S(t-\omega)}-q\mu I(t)\end{aligned}\right\}\quad t\neq k\tau\\\left.\begin{aligned}&S(t^+)=(1-p)S(t)\\&I(t^+)=I(t)\end{aligned}\right\}\quad t=k\tau\end{cases}\qquad ②$$

初始条件为

$$(\phi_1(\theta),\phi_2(\theta))\in C_+=C([-\omega,0],\ R_+^{\ 2})$$
$$\phi_i(0)>0,i=1,\ 2\qquad ③$$

从生物学意义出发，我们仅在系统②的不变区域 $\Omega=\{(S,I)\in R^2\mid S\geqslant 0,I\geqslant 0,S+I\leqslant 1\}$ 内进行讨论.

引理 1　对于脉冲微分方程

$$\begin{cases}\dot u(t)=a-bu(t) & t\neq k\tau\\u(t^+)=(1-p)u(t) & t=k\tau\end{cases}\qquad ④$$

其中，$a>0$，$b>0$，$0<p<1$，存在唯一的正周期解

$$\tilde u_e(t)=\frac{a}{b}+(u^*-\frac{a}{b})e^{-b(t-k\tau)}\qquad k\tau<t\leqslant(k+1)\tau$$

此周期解是全局渐近稳定的，这里

$$u^*=\frac{a(1-p)(1-e^{-b\tau})}{b(1-(1-p)e^{-b\tau})}$$

证明　在脉冲区间上积分求解系统②的第 1 个方程，得到

$$u(t)=\frac{a}{b}+(u(k\tau)-\frac{a}{b})e^{-b(t-k\tau)}\qquad k\tau<t\leqslant(k+1)\tau$$

其中，$u(k\tau)$ 是在时刻 $k\tau$ 处的初始值. 应用系统②的第 2 个方程，得到频闪映射为

$$u((k+1)\tau)=(1-p)\left[\frac{a}{b}+(u(k\tau)-\frac{a}{b})e^{-bT}\right]\stackrel{\Delta}{=}f(u(k\tau))\qquad ⑤$$

其中，$f(u)=(1-p)\left[\frac{a}{b}+(u-\frac{a}{b})e^{-bT}\right]$. 容易看出⑤式有唯一的正平衡点

$$u^*=\frac{a(1-p)(1-e^{-b\tau})}{b(1-(1-p)e^{-b\tau})}$$

并且如果 $0<u<u^*$，$u<f(u)<u^*$，$u>u^*$，$u^*<f(u)<u$，由文献[8]可以得到 u^* 是全局渐近稳定的. 这意味着系统④对应的周期解

$$\tilde u_e(t)=\frac{a}{b}+(u^*-\frac{a}{b})e^{-b(t-k\tau)}\qquad k\tau<t\leqslant(k+1)\tau$$

是全局渐近稳定的.

2　无病周期解的全局稳定性

首先给出无病周期解的存在性. 在无病周期解位置，染病人群的数量为 0，即对所有的 $t\geqslant 0$，$I(t)=0$. 在此条件下，易感人群一定满足方程

$$\begin{cases}\dot S(t)=-\beta\frac{S(t)I(t)}{1+\alpha S(t)}+\mu(1-S(t))-(1-q)\mu I(t) & t\neq k\tau\\S(t^+)=(1-p)S(t) & t=k\tau\end{cases}\qquad ⑥$$

下面将证明易感人群数量 $S(t)$ 与脉冲接种周期 τ 同步震荡.

根据引理 1 可知，系统⑥的周期解

$$\tilde S_e(t)=1-\frac{p}{1-(1-p)e^{-\mu\tau}}e^{-\mu(t-k\tau)}\quad k\tau<t\leqslant(k+1)\tau\quad ⑦$$

是全局渐近稳定的.

下面将确定系统②的无病周期解$(\tilde{S}_e(t),0)$全局渐近稳定的条件.

记 $R^* = \dfrac{\beta(1-e^{-\mu\tau})}{[1-(1-p)e^{-\mu\tau}+\alpha(1-e^{-\mu\tau})]qu}$, 则有如下结论.

定理 1 如果 $R^*<1$, 系统②的无病周期解$(\tilde{S}_e(t),0)$是全局渐近稳定的.

证明 由于 $R^*<1$, 能够选择充分小的 $\varepsilon_1>0$, 使得

$$\frac{\beta\left[\dfrac{(1-e^{-\mu\tau})}{1-(1-p)e^{-\mu\tau}}+\varepsilon_1\right]}{1+\alpha\left[\dfrac{1-e^{-\mu\tau}}{1-(1-p)e^{-\mu\tau}}+\varepsilon_1\right]}-q\mu<0 \qquad ⑧$$

由系统②的第 1 个方程可得 $\dot{S}(t)<\mu-\mu S(t)$, 由此考虑下面的脉冲比较方程

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=\mu-\mu x(t) & t\neq k\tau\\ x(t^+)=(1-p)x(t) & t=k\tau\end{cases} \qquad ⑨$$

由引理 1 可知, 系统⑨的唯一的周期解

$$\tilde{x}_e(t)=1-\frac{p}{1-(1-p)e^{-\mu\tau}}e^{-\mu(t-k\tau)} \qquad k\tau<t\leqslant(k+1)\tau$$

是全局渐近稳定的.

设$(S(t),I(t))$是系统②的满足初始条件③和 $S(0^+)=S_0>0$ 的解, $x(t)$是系统⑨的满足初始值 $x(0^+)=S_0$ 的解. 由脉冲微分方程的比较原理可知, 一定存在整数 $k_1>0$, 使得

$$S(t)<\tilde{x}_e(t)+\varepsilon_1 \qquad k\tau<t\leqslant(k+1)\tau \qquad k>k_1$$

也就是

$$S(t)<\tilde{S}_e(t)+\varepsilon_1\leqslant\frac{1-e^{-\mu\tau}}{1-(1-p)e^{-\mu\tau}}+\varepsilon_1 \triangleq \eta$$

$$k\tau<t\leqslant(k+1)\tau \qquad k>k_1 \qquad ⑩$$

进一步地, 由系统②的第 2 个方程可知, 公式⑩意味着

$$\dot{I}(t)\leqslant\frac{\beta\eta I(t)}{1+\alpha\eta}-q\mu I(t) \qquad t>k\tau, k>k_1$$

考虑比较系统

$$\dot{y}(t)=\left(\frac{\beta\eta}{1+\alpha\eta}-q\mu\right)y(t) \qquad t>k\tau, k>k_1 \qquad ⑪$$

由⑧式可知, $\dfrac{\beta\eta}{1+\alpha\eta}-q\mu<0$, 易得$\lim\limits_{t\to\infty}y(t)=0$.

设$(S(t),I(t))$是系统②的满足初始条件③和 $I(0^+)=I_0>0$ 的解, $y(t)$是系统⑪的满足初始值 $y(0^+)=I_0$ 的解. 依据比较原理, 有

$$\limsup_{t\to\infty}I(t)<\limsup_{t\to\infty}y(t)=0$$

又因为 $I(t)\geqslant0$, 有 $\lim\limits_{t\to\infty}I(t)=0$, 因此, 对于任意充分小的 $\varepsilon_2>0$, 存在整数 $k_2>k_1$ 使得对所有的 $t>k_2\tau$, $I(t)<\varepsilon_2$.

由系统②的第 1 个方程, 有

$$\dot{S}(t)>-\beta\frac{\varepsilon_2}{1+\alpha}S(t)+\mu(1-S(t))-(1-q)\mu\varepsilon_2$$

即

$$\dot{S}(t)>[\mu-(1-q)\mu\varepsilon_2]-\left(\frac{\beta\varepsilon_2}{1+\alpha}+\mu\right)S(t) \qquad t>k_2\tau$$

考虑脉冲微分方程比较系统

$$\begin{cases}\dot{z}(t)>[\mu-(1-q)\mu\varepsilon_2]-\left(\dfrac{\beta\varepsilon_2}{1+\alpha}+\mu\right)z(t) & t\neq k_2\tau\\ z(t^+)=(1-p)z(t) & t=k_2\tau\end{cases} \qquad ⑫$$

由引理 1 可知, 系统⑫唯一的周期解

$$\tilde{z}_e(t)=\frac{\mu-(1-q)\mu\varepsilon_2}{\dfrac{\beta\varepsilon_2}{1+\alpha}+\mu}+\left(z^*-\frac{\mu-(1-q)\mu\varepsilon_2}{\dfrac{\beta\varepsilon_2}{1+\alpha}+\mu}\right)e^{-(\frac{\beta\varepsilon_2}{1+\alpha}+\mu)(t-k\tau)}$$

$$k\tau<t\leqslant(k+1)\tau$$

是全局渐近稳定的, 这里

$$z^*=\frac{\mu-(1-q)\mu\varepsilon_2}{\dfrac{\beta\varepsilon_2}{1+\alpha}+\mu}\ \frac{(1-p)[1-e^{-(\frac{\beta\varepsilon_2}{1+\alpha}+\mu)\tau}]}{1-(1-p)e^{-(\frac{\beta\varepsilon_2}{1+\alpha}+\mu)\tau}}$$

$$k\tau<t\leqslant(k+1)\tau$$

设$(S(t), I(t))$是系统②的满足初始条件③和 $S(0^+)=S_0>0$ 的解, $z(t)$是系统⑫的满足初始值 $z(0^+)=S_0$ 的解. 利用脉冲微分方程的比较原理, 存在整数 $k_3>k_2$, 使得

$$S(t)>\tilde{z}_e(t)-\varepsilon_2 \qquad k\tau<t\leqslant(k+1)\tau \qquad k>k_3 \qquad ⑬$$

由于 ε_1 和 ε_2 充分小, 由⑩和⑬可知

$$\tilde{S}_e(t)=1-\frac{p}{1-(1-p)e^{-\mu\tau}}e^{-\mu(t-k\tau)} \qquad k\tau<t\leqslant(k+1)\tau$$

是全局渐近稳定的. 因此, 系统②的无病周期解$(\tilde{S}_e(t),0)$是全局吸引的.

通过简单的运算可知, $R^*<1$ 等价于

$$\tau<-\frac{1}{\mu}\ln\frac{\beta-q\mu(1+\alpha)}{\beta-q\mu(1+\alpha-p)}$$

记 $\tau_{\max}=-\dfrac{1}{\mu}\ln\dfrac{\beta-q\mu(1+\alpha)}{\beta-q\mu(1+\alpha-p)}$, 则有如下结论:

定理 2 若 $\beta/[q\mu(1+\alpha)]>1$, 则当 $\tau<\tau_{\max}$ 时, 系统②的无病周期解$(\tilde{S}_e(t),0)$是全局渐近稳

定的.

3　结论

本文分析了带有时滞与饱和发生率的 SIR 脉冲接种模型,给出了无病周期解全局稳定的条件,即当疾病传播的基本再生数 $R^{*}<1$ 时,疾病可以根除. 可以通过多种途径来降低 R^{*},比如可以增加成功接种的比例 p,降低垂直传染的比例 q,增加疾病接种的周期 τ 等. 本文还给出了疾病控制的最大接种周期 $\tau_{\max}$,即当接种周期 $\tau<\tau_{\max}$时,疾病就可以根除. 该脉冲接种模型相比较传统的接种模型,所需成本更低,且更加有效.

但是,本文考虑的模型是脉冲接种模型,且具有时滞与饱和发生率. 事实上,模型本身还有很多值得改进的地方,如考虑其他形式的非线性疾病发生率、考虑多个时滞存在的情况、考虑状态依赖模型等,更多因素的考虑有可能使模型更接近客观实际,提供的理论结果也更有实际意义,这将是今后研究的方向.

参考文献:

[1] d'Onofrio A. Stability properties of pulse vaccination strategy in SEIR epidemic model[J]. Math Biosci,2002,179(1):57.

[2] Shulgin B,Stone L,Agur Z. Pulse vaccination strategy in the SIR epidemic model[J]. Bull Math Biol,1998,60:1123.

[3] Stone L,Shulgin B,Agur Z. Theoretical examination of the pulse vaccination policy in the SIR epidemic model[J]. Math Comp Modelling,2000,31:207.

[4] Agur Z,Cojocaru L,Mazor G,et al. Pulse mass measles vaccination across age cohorts[J]. Proc Nat Acad Sci USA,1993,90:11698.

[5] Hui J,Chen L. Impulsive vaccination of SIR epidemic models with nonlinear incidence rates[J]. Discrete and Continuous Dynamical System(Series B),2004(4):595.

[6] Liu W M,Hethcote H W,Levin S A. Dynamical behavior of epidemiological models with nonlinear incidence rates[J]. J Math Biol,1987,25(4):359.

[7] Liu W M,Levin S A,Iwasa Y. Influence of nonlinear incidence rates upon the behavior of SIRS epidemiological models[J]. J Math Biol,1986,23(2):187.

[8] Cull P. Global stability for population models[J]. Bull Math Bio,1981,43(1):47.

(上接第 93 页)

4　结语

本文研究了一类时滞中立模糊切换系统的保性能控制问题,用矩阵不等式的形式给出了系统稳定的充分条件和切换律的设计方案,找到了系统的性能上界,所得结果以线性不等式形式给出,便于 Matlab 求解.

参考文献:

[1] Mathmoud M S. Control of uncertain state-delay systems: guaranteed cost approach[J]. IMA J of Math Control and Infor,2001,18(1):109.

[2] Xu S Y,Lam J,Yang C W. H_{∞} and positive-real control for linear neutral delay systems[J]. IEEE Trans on Auto Control,2001,46(8):1321.

[3] Han Qing-long. On robust stability of neutral systems with time-varying discrete delay and norm-bounded uncertainty[J]. Automatica,2004,40:1087.

[4] 孙希明,付俊,孙洪飞,等. 一类切换线性中立时滞系统稳定性的分析[J]. 中国电机工程学报,2005,25(23):42.

[5] 毛北行,喻军,卜春霞. 一类时滞中立型切换系统的反馈镇定[J]. 郑州大学学报:理学版,2011,43(1):1.

[6] 王彤,朱伟. 中立型模糊时滞系统的非易碎保成本控制[J]. 南京师范大学学报:工程技术版,2010,10(1):5.

[7] 俞立. 鲁棒控制——线性矩阵不等式处理方法[M]. 北京:清华大学出版社,2002.