

# 基于 Duffing 振子的微弱信号检测

孙玉胜, 詹小霞, 石军, 胡智宏

(郑州轻工业学院 电气信息工程学院, 河南 郑州 450002)

**摘要:**针对相轨迹图是一种无明显规律的阵发混沌现象,仅从相轨迹图很难进行目测识别,因而无法直接用于工程实践的问题,在基于 Duffing 振子的微弱信号检测中,以 Hu 式不变矩作为定量指标对相轨迹图进行识别,从而快速得出一个准确的量化测度.该方法便于计算机自动识别,具有工程实践应用价值.

**关键词:**Duffing 振子;微弱信号检测;Hu 式不变矩;相轨迹图

**中图分类号:**TM93 **文献标志码:**A **DOI:**10.3969/j.issn.2095-476X.2012.05.019

## Weak signal detection based on Duffing oscillator

SUN Yu-sheng, ZHAN Xiao-xia, SHI Jun, HU Zhi-hong

(College of Electr. and Infor. Eng., Zhengzhou Univ. of Light Ind., Zhengzhou 450002, China)

**Abstract:** Aiming at the problem that it was difficult to visual test phase trajectories form as a law intermittency phenomenon, and which could not be used in engineering practice directly. The phase trajectories was identified through Hu type invariant moment as quantitative indicator in the detection of weak signal characteristics based on the Duffing oscillator. A rapid and accurate quantitative measure was obtained to facilitate the automatical recognition of computer which could be applied to engineering practice.

**Key words:** Duffing oscillator; weak signal detection; Hu type invariant moment; phase trajectories

## 0 引言

微弱信号检测是近代信息理论的一个重要内容,自 1940 年代提出以来,经过几十年的发展已经日臻成熟.传统的检测方法主要是抑制噪声和放大被测信号,如累积、取样积分、相关检测、谱分析都是基于抑制噪声的方法,在抑制噪声的时候会不可避免地对被测微弱信号造成一定的影响.基于混沌振子相轨迹变化对微弱信号进行检测是一种信号提取技术,混沌系统具有较高的测量灵敏度,对任何零均值噪声均具有很强的免疫力,这一特点决定

了混沌测量方法特别适合复杂混合噪声背景下和低信噪比条件下微弱信号的测量,而这正是常规信号测量方法中一直未能得到很好解决的尖端问题和信号处理领域中研究的焦点问题<sup>[1]</sup>.

基于 Duffing 振子相轨迹变化实现对强噪声背景下微弱信号进行检测的方法是一种基于非线性系统的信号检测技术.混沌系统对特定频率的微弱周期信号的灵敏度极高,但是对噪声却不敏感,任何零均值噪声都不会对系统状态产生影响.所以, Duffing 混沌系统很适合用来测量强噪声背景、低信噪比条件下的微弱信号.在基于混沌系统的微弱信

收稿日期:2012-03-08

基金项目:河南省科技攻关项目(0623031800)

作者简介:孙玉胜(1964—),男,河南省郑州市人,郑州轻工业学院教授,主要研究方向为测试计量及仪器、微控制研究及应用、电机电器及其控制.

号检测中,系统输出是否由混沌临界状态转变到稳定周期状态是判定系统输入的待测信号中是否含有已知周期信号的关键依据. 所以,系统从混沌临界状态跃迁到稳定周期状态的阈值的确定是该检测方法的关键环节. 目前,确定混沌系统状态转变的方法主要有李亚普诺夫指数法、Poincare 截面法、相轨迹直接观察法、分维数法、Kolmogorov 熵、分形理论分析法以及梅尔尼科夫方法等. 其中相轨迹直接观察法较为常用,但是相轨迹图是一种无明显规律的阵发混沌现象,无法直接运用到工程领域. 因此,在利用 Duffing 振子进行微弱信号检测时,相变的判断需要可靠的量化测度. 本文拟以不变矩作为定量指标,对相轨迹图进行定量识别.

## 1 Duffing 振子检测微弱信号的原理和仿真

### 1.1 Duffing 振子检测的基本原理

在非线性动力学系统中,Duffing 方程是研究比较充分的混沌模型系统之一. Duffing 振子既具有幅值的敏感性,也具有好的频率敏感性,利用这 2 个特性可调节驱动力,实现对强噪声背景下微弱信号的柔性检测.

### 1.2 Duffing 振子检测仿真实验

本文采用 Homles 型的 Duffing 方程作为检测系统<sup>[2-4]</sup>,Duffing 方程的特点之一就是方程等号右边加一周期的驱动力,形成自制方程. 它是由 1 个二阶微分方程描述的,具体形式为

$$x''(t) + kx'(t) - x(t) + x^3(t) = \gamma \cos(\omega t) \quad (1)$$

其中, $\omega$  为角频率. 为了可以检测任意频率的周期信号,令  $t = \omega\tau$ ,将其变形如下状态方程:

$$\begin{cases} x' = \omega y \\ y' = \omega[-ky + x - x^3 + \gamma \cos(\omega\tau)] \end{cases} \quad (2)$$

当加入被测微弱周期信号和外部噪声后,式 (2) 变为

$$\begin{cases} x' = \omega y \\ y' = \omega[-ky + x - x^3 + \gamma \cos(\omega t) + \gamma_1 \cos(\omega\tau) + bN(t)] \end{cases}$$

$\omega$  为内部周期驱动力的角频率, $\theta$  为被测微弱周期信号的相位, $N(t)$  为服从正态分布的随机噪声.

由于系统状态随  $\gamma$  变化而规律地变化,当  $\gamma = 0$  时,相轨迹将最终停在相平面的两焦点之一.  $\gamma \neq 0$  时,非自治系统表现出复杂的动力学形态(同宿轨

道、异宿轨道状态,倍周期分叉状态、混沌状态、大尺度周期运动状态). 当待测信号与驱动力信号一致时,相轨迹图由混沌临界状态进入大周期状态.

仿真模型如图 1 所示,该实验使用 Matlab 中的 Smlink 进行仿真,将待测信号作为周期驱动力并入系统,即系统的总驱动由预置驱动力和被测驱信号组成.  $\gamma$  从 0 逐渐增加至超过某一阈值再增加至超过另一个阈值的过程中,振子的时间历程图及相位图将出现变化(见图 2,图中  $x, y$  为输入信号在系统中的变化轨迹,无量纲),变化规律在相空间上显示为倍周期分叉状态  $\rightarrow$  混沌状态  $\rightarrow$  大周期状态<sup>[5]</sup>.

利用 Duffing 方程的相位图随  $\gamma$  变化特性,结合式 (3),在已知被测微弱周期信号频率的前提下,将

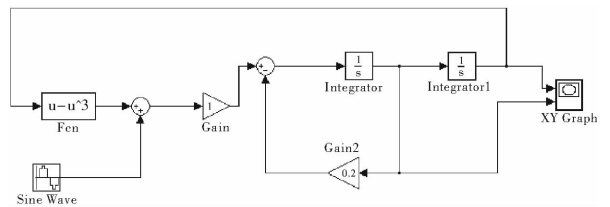
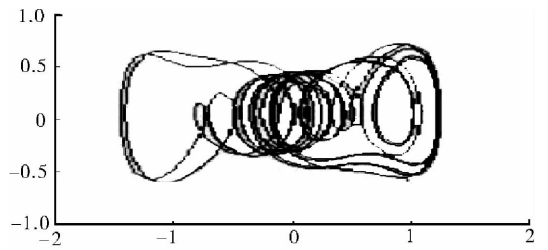
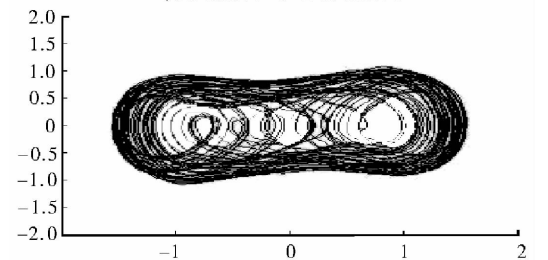


图 1 仿真模型图



a)倍周期分叉状态相轨迹图



b)混沌状态时间相轨迹图



c)大周期状态时间相轨迹图

图 2 相位图的变化趋势

内部驱动力的频率设为被测信号的频率. 设  $\gamma$  略小于阈值, 振子处于混沌状态, 当把同频率同振幅的周期信号加入振子时, 振子就会发生从混沌状态到大周期状态的变化. 辨识振子状态的变化就可以判断被测信号中是否存在频率等于  $\omega$  的周期与驱动力相同的待测信号<sup>[6]</sup>.

## 2 Duffing 振子相轨迹图的自动识别

在工程实践中, 微弱信号淹没在强背景噪声中时, 系统的相变演化是渐进的, 经过一个由混沌到阵发混沌再到大尺度周期的运动过程, 仅对相轨迹图或时域波形进行目测很难识别. 当相轨迹图是一种无明显规律的阵发混沌现象时, 振子并未发生相变, 如果按理想情况分析就会得出输入信号中不存在上述频率微弱周期信号的错误结论. 因此, 基于 Duffing 振子的微弱信号检测中, 相变的判断需要可靠而快速的量化测度.

不变矩是一种提取灰度图像特征的方法, 由 Ming-Kuei Hu 于 1962 年首先提出, 并给出了连续函数矩的定义和关于矩的基本性质, 随后 R. Y. Wong 进一步给出了离散情况下的各阶矩的计算方法.<sup>[7]</sup> 不变矩算法是一种通过提取具有平移、旋转和比例因子不变性的数学特征来解决集合失真问题的方法<sup>[8]</sup>. 因此, 根据 Hu 氏不变矩的特性, 结合 Duffing 振子相轨迹图的特征, 根据不同条件下状态发生明显变化对相轨迹图进行定量识别<sup>[9-11]</sup>.

### 2.1 Hu 式不变矩的平移、伸缩、旋转不变性

设一个二维模式  $f(x, y)$ , 对于任意整数  $p, q$ , 则  $f(x, y)$  在  $R^2$  平面上的  $p + q$  阶矩为

$$m_{pq} = \iint_{\gamma} x^p y^q f(x, y) dx dy$$

式中,  $f(x, y)$  为图形在坐标点  $(x, y)$  上的灰度.

对于二值图像, 在  $R^2$  平面上的  $p + q$  阶矩为

$$m_{pq} = \sum_y \sum_x x^p y^q f(x, y) \quad (3)$$

$m_{pq}$  依赖图像在坐标中的位置, 不具备平移不变性,  $p + q$  阶中心矩  $\mu_{pq}$  满足平移不变性, 其定义为

$$\mu_{pq} = \sum_y \sum_x (x - \bar{x})^p (y - \bar{y})^q f(x, y) \quad (4)$$

式中,  $(\bar{x}, \bar{y})$  代表图像的质心.

对  $\mu_{pq}$  进行正规化处理得

$$\eta_{pq} = \frac{\mu_{pq}}{\mu_{00}^{1+\frac{p+q}{2}}} \quad p + q \geq 2 \quad (5)$$

$\eta_{pq}$  满足了平移不变性和伸缩不变性, 但不满足旋转不变性, Hu 通过研究分析得到了 7 个完备的 2

阶和 3 阶不变矩:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \eta_{20} + \eta_{02} \\ \varphi_2 &= (\eta_{20} - \eta_{02})^2 + 4\eta_{11}^2 \\ \varphi_3 &= (\eta_{30} - 3\eta_{12})^2 + (3\eta_{21} - \eta_{03})^2 \\ \varphi_4 &= (\eta_{30} + \eta_{12})^2 + (\eta_{21} + \eta_{03})^2 \\ \varphi_5 &= (\eta_{30} - 3\eta_{12})(\eta_{30} + \eta_{12}) \cdot \\ & \quad [(\eta_{30} + \eta_{12})^2 - 3(\eta_{21} + \eta_{03})^2] + \\ & \quad (3\eta_{21} - \eta_{03})(\eta_{21} + \eta_{03}) \cdot \\ & \quad [3(\eta_{30} + \eta_{12})^2 - (\eta_{21} + \eta_{03})^2] \\ \varphi_6 &= (\eta_{20} - \eta_{02})[(\eta_{30} + \eta_{12})^2 - (\eta_{21} + \eta_{03})^2] + \\ & \quad 4\eta_{11}(\eta_{30} + \eta_{12}) \\ \varphi_7 &= (3\eta_{21} - \eta_{03})(\eta_{30} + \eta_{12}) \cdot \\ & \quad [(\eta_{30} + \eta_{12})^2 - 3(\eta_{21} + \eta_{03})^2] + \\ & \quad (3\eta_{21} - \eta_{03})(\eta_{21} + \eta_{03}) \cdot \\ & \quad [3(\eta_{30} + \eta_{12})^2 - (\eta_{21} + \eta_{03})^2] \end{aligned}$$

$\varphi_1$  是表示图像发散程度的度量指标, 图像的发散程度越大,  $\varphi_1$  越大;  $\varphi_2$  是表示图像对称性的度量指标, 图像对称性越好,  $\varphi_2$  越小.

### 2.2 仿真数据分析

根据矩的平移、伸缩、旋转不变性, 选用  $\varphi_1$  不变矩作为自动识别相位图的量化指标. 对于混沌相位图这样的二维图像, 在计算不变矩时, 可以认为  $R^2$  平面上相位图经过的各坐标点的灰度都相同 ( $f(x, y) = 1$ ), 相位图没有经过的坐标点的灰度为 0 (即  $f(x, y) = 0$ ), 然后代入式 (3)(4)(5) 中, 计算混沌相位图的不变矩  $\varphi_1$ .

首先让 Duffing 振子系统中只有参考信号, 设置不同大小的幅值, 与图 2 中的仿真条件相同, 得到 Duffing 振子在不同状态时 Hu 式不变矩的数值: 当  $\gamma = 0.25$  时, 系统处于倍周期分叉状态,  $\varphi_1 = 0.067$ ;  $\gamma = 0.64$ , 系统处于混沌状态,  $\varphi_1 = 1.2949$ ;  $\gamma = 0.68$ , 系统处于大周期状态,  $\varphi_1 = 2.4720$ . 特别是当  $\gamma$  从 0.64 增大到 0.68 时, 不变矩值的变化量是 1.1771, 远远大于  $\gamma$  的变化量 0.04.

噪声的强度是否会影响不变矩的大小, 笔者通过仿真进行分析比较. 对于式 (2), 采用 4 阶 Runge-Kutta 法进行求解, 初始值  $x(0) = 0, y(0) = 0, c = 0.5$ , 仿真得到的不变矩  $\varphi_1$  趋势图见图 3.

从图 3 可以看出, 在  $\gamma < 0.65$ , 不变矩  $\varphi_1 < 2.4$  时,  $\varphi_1$  变化很快; 而当  $\gamma > 0.65$ , 不变矩值  $\varphi_1 < 2.4$  时, 变化就很缓慢了, 这个阶段也正是相位图处于大尺度周期状态. 所以, 能确定该混沌振子系统  $\varphi_1$  的阈

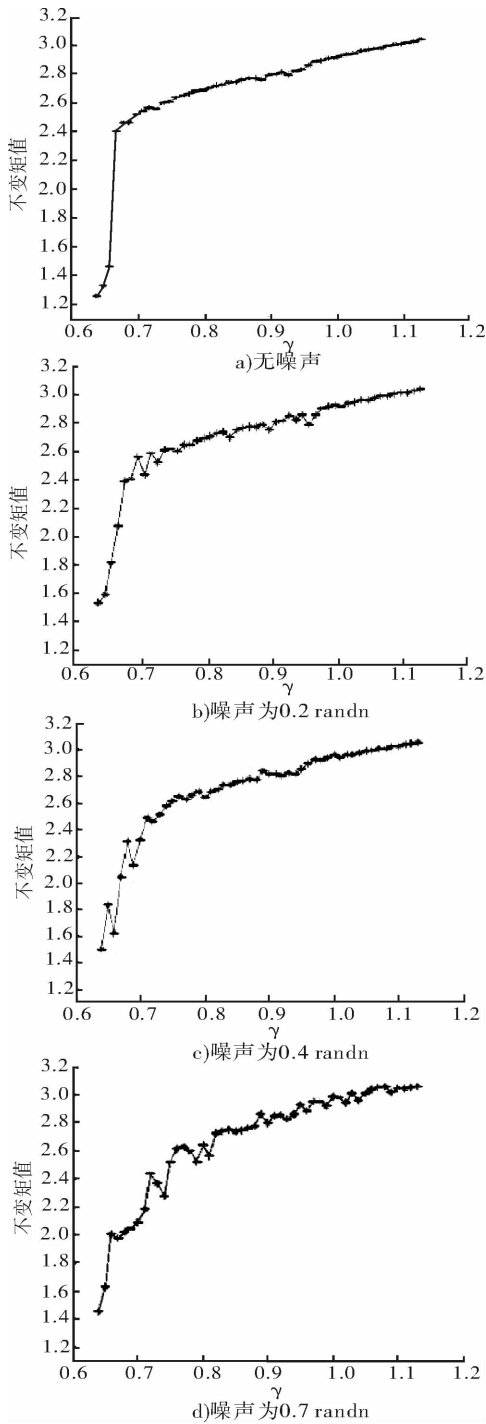


图3 不同强度噪声下的不变矩值趋势图

值为 2.4, 只要  $\varphi_1 > 2.4$ , 则可认为系统处于大尺度周期状态. 同时, 可以发现, 当噪声强度(实验加入的为高斯白噪声, 单位为 randn) 较大时, 不变矩值趋势图出现明显的波动(见图 3d), 此时利用不变矩值来定量检测可能会产生一定的误差. 通过大量仿真发现, 相位图在不同的状态具有不同的  $\varphi_1$ , 并且

其变化具有一定的规律性, 在混沌状态下和大尺度周期下的  $\varphi_1$  区别很明显, 从而可以定量识别相位图的状态, 达到自动识别的目的.

### 3 结论

本文提出一种利用混沌振子的相轨迹法进行微弱信号检测的方法, 以 Hu 式不变矩作为识别混沌振子系统相轨迹变化的一个量化指标, 通过分析 Hu 式不变矩数值随着参考信号的幅值而变化的趋势图发现, 相轨迹图从混沌状态变化至大尺度周期状态时, Hu 式不变矩数值会有一个明显的跃迁, 并且信号在一定的信噪比范围内的变化趋势比较稳定, 这个特征便于计算机自动识别. 该方法的提出对于混沌振子微弱信号检测的进一步推广和应用有积极的意义.

### 参考文献:

- [1] 张健, 王竹萍, 吕宁, 等. 基于混沌理论的检测进展[J]. 电子器件, 2005, 28(2): 307.
- [2] 李月, 杨宝俊. 混沌振子检测引论[M]. 北京: 电子工业出版社, 2004.
- [3] 张琪昌, 王洪礼, 竺致文, 等. 分岔与混沌理论及应用[M]. 天津: 天津大学出版社, 2005.
- [4] Misra S, Chopra S. Phase stability via nonlinear optimization: A case Study [J]. The Leading Edge, 2010, 29(11): 1338.
- [5] 徐艳春. 基于混沌振子的微弱光电信号检测技术研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2010.
- [6] Liu X C, Liu X L. Weak signal detection research based on Duffing oscillator used for downhole communication[J]. J of Comp, 2011, 6(2): 359.
- [7] 何金群. 基于 Duffing 振子的低速重载设备故障诊断方法及应用[D]. 北京: 北京工业大学, 2009.
- [8] 丁明跃, 常金玲, 彭嘉雄. 不变矩算法研究[J]. 数据采集与处理, 1992, 7(1): 1.
- [9] 万书亭, 彭学志. 发电机转子轴心轨迹形状自动识别方法的研究[J]. 华北电力大学学报, 2004, 31(5): 26.
- [10] 万书亭, 李永刚, 李和明. 基于不变矩特征和新型关联度的轴心轨迹自动识别[J]. 热能动力工程, 2005, 20(3): 239.
- [11] 李亚峻, 李月, 卢金, 等. 微弱信号混沌检测系统混沌阈值的确定[J]. 吉林大学学报: 信息科学版, 2004, 22(2): 106.