文章编号:2095－476X(2012)05－0107－02

四元数自共轭矩阵的一个性质

徐继军[1]，　任喜风[2]

(1. 郑州师范学院 数学系，河南 郑州 450044；
2. 郑州轻工业学院 数学与信息科学系，河南 郑州 450002)

摘要:讨论了四元数自共轭矩阵的一个性质,利用该性质把 n 阶四元数正定(半正定、负定)自共轭矩阵的定义予以简化,得到了与四元数自共轭矩阵的相同结论.

关键词:四元数;自共轭矩阵;正定

中图分类号:O151.21　　**文献标志码**:A　　DOI:10.3969/j.issn.2095－476X.2012.05.026

A property of quaternion self-conjugate matrix

XU Ji-jun[1],　REN Xi-feng[2]

(1. *Dept. of Mathe., Zhengzhou Normal Univ., Zhengzhou* 450044, *China*;
2. *Dept. of Mathe. and Infor. Sci., Zhengzhou Univ. of Light Ind., Zhengzhou* 450002, *China*)

Abstract: A property of quaternion self-conjugate matrix was discussed. The definition of n order quaternion positive definite (positive semi-definite, negative definite) self-conjugate matrix was simplified using this property and the same conclusions with quaternion self-conjugate matrix were drawn.

Key words: quaternion; self-conjugate matrix; positive definite

0　引言

四元数是复数的推广.随着刚体力学理论的发展,人们发现四元数和四元数矩阵在许多问题中有广泛的应用[1-2].实四元数矩阵研究的主要难点是四元数乘法具有不可交换性,四元数自共轭矩阵的研究是四元数代数理论的主要方面,这也促使人们对四元数自共轭矩阵问题展开研究[3-4].本文拟讨论四元数自共轭矩阵的一个性质,并利用该性质把 n 阶四元数正定(半正定、负定)自共轭矩阵的定义予以简化,以期得到与四元数自共轭矩阵的相同结论.

1　预备知识

本文的 $\boldsymbol{R},\boldsymbol{Q},\boldsymbol{C}$ 分别实数集、四元数体和复数集. $\boldsymbol{U}$ 表示 $m\times n$ 阶四元数体上的矩阵集,若 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{U}$,则 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定(半正定、负定)自共轭矩阵.

定义1　设

$$x=a+bi+cj+dk \tag{①}$$

其中,$a,b,c,d\in\boldsymbol{R}$;i,j,k 满足 $i^2=j^2=k^2=-1$,$ij=-ji=k$,$jk=-kj=i$,$ki=-ik=j$,则称形为式①的 x 为四元数.当 $c=d=0$ 时,式①表示的四元数就是复数;当 $b=c=d=0$ 时,式①表示的四元数就是实数.

对于数的加法和乘法来说,实数集和复数集都能够成域,而对于四元数则不构成域,因为它是非交换环,故一般称为四元数体,记为 $\boldsymbol{Q}$.

定义2　设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,$a_{ij}\in\boldsymbol{Q}$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为四元数矩阵.

定义3　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶四元数矩阵,若对任意非零 n 维四元数行向量 $\boldsymbol{X}$,$\boldsymbol{XAX'}$ 均为实数,则 $\boldsymbol{A}$ 为自共轭矩阵. $\boldsymbol{X'}$ 是 $\boldsymbol{X}$ 的转置,它是任意非零 n 维四元数列向量.

收稿日期:2012－02－16

作者简介:徐继军(1967—),男,河南省郑州市人,郑州师范学院副教授,硕士,主要研究方向为基础数学.

定义 4 设 $\boldsymbol{A}$ 是四元数体 $\boldsymbol{Q}$ 上的一个 n 阶自共轭矩阵,如果对 $\boldsymbol{Q}$ 上任意非零行向量 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 恒有 $\boldsymbol{XAX}'>0$,则 $\boldsymbol{A}$ 是一个正定(或半正定、负定)的自共轭矩阵.

定义里包含了 2 个前提条件:1)$\boldsymbol{A}$ 是 n 阶四元数自共轭矩阵;2)对于任意非零 n 维四元数行向量 $\boldsymbol{X}$,恒有 $\boldsymbol{XAX}'>0$($\geqslant 0$ 或 <0).

其实,定义里第 1 个条件中,要求 $\boldsymbol{A}$ 是自共轭矩阵是多余的,笔者可以证明.

2 定理及证明

定理 1 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶四元数矩阵,则 $\boldsymbol{A}$ 为自共轭矩阵的充要条件是:对任意非零 n 维四元数行向量 $\boldsymbol{X}$,有 $\boldsymbol{XAX}'$均为实数.

证明 (充分性)设四元数矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{st})_{nn}$,取

$$\boldsymbol{X}=(0,\cdots,0,\underset{(S)}{1},0,\cdots,0)$$

则

$$\boldsymbol{XAX}'=(0,\cdots,0,\underset{(S)}{1},0,\cdots0)(a_{st})(0,\cdots,0,\underset{(S)}{1},0,\cdots,0)'=a_{ss} \quad ①$$

为实数. 其中,$s=1,2,\cdots,n$.

又取

$$\boldsymbol{X}=(0,\cdots,0,\underset{(S)}{1},0,\cdots,0,\underset{(t)}{1},0,\cdots,0)$$

其中,$1\leqslant s<t\leqslant n$. 则

$$\boldsymbol{XAX}'=(0,\cdots,0,\underset{(S)}{1},0,\cdots,0,\underset{(t)}{1},0,\cdots,0)(a_{st})\cdot$$
$$(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)'=a_{ss}+a_{st}+a_{ts}+a_{tt}$$

已证 a_{ss},a_{tt}为实数,于是 $a_{st}+a_{ts}$必须为实数.

设

$$a_{ts}=a_1+b_1i+c_1j+d_1k$$
$$a_{st}=a_2+b_2i+c_2j+d_2k$$

其中,$a_1,b_1,c_1,d_1,a_2,b_2,c_2,d_2$ 均为实数;i,j,k 为四元数的虚单位,则

$$a_{ts}+a_{st}=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i+(c_1+c_2)j+(d_1+d_2)k$$

为实数,因而必须有

$$b_1=-b_2 \qquad c_1=-c_2 \qquad d_1=-d_2 \quad ②$$

再取 $\boldsymbol{X}=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0,i,0,\cdots,0)$,$1\leqslant s<t\leqslant n$,则 $\boldsymbol{XAX}'=a_{ss}-ia_{ts}+ia_{st}+a_{tt}$为实数. 已证 a_{ss},a_{tt}为实数,于是 $-ia_{ts}+ia_{st}$必须是实数,即

$$-ia_{ts}+ia_{st}=-i(a_1+b_1i+c_1j+d_1k)+i(a_2+b_2i+c_2j+d_2k)=-a_1i+b_1-c_1k+d_1j+a_2i-b_2-c_2k+d_2j=$$
$$(b_1-b_2)+(a_2-a_1)i+(d_1+d_2)j-(c_1+c_2)k$$

必须为实数,从而必须有

$$a_1=a_2 \qquad d_1=-d_2 \qquad c_1=-c_2 \quad ③$$

综合①②③可得 $a_{ts}=a_{st}(s,t=1,2,\cdots,n)$,即 $\boldsymbol{A}$ 是自共轭矩阵,充分性获证. 必要性是显然的,证明过程略. 同理可推出 n 阶复矩阵为变 Hermitian 矩阵的充要条件.

定理 2 该 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶复矩阵,则 $\boldsymbol{A}$ 为 Hermitian 矩阵的充要条件是:对任意非零 n 维复向量 $\boldsymbol{X}$,$\boldsymbol{XAX}'$均为实数.

证明过程略.

由定理 2 可知,复正定(半正定、负定)矩阵定义中,关于 Hermitian 矩阵的这个条件也是多余的.

3 结论

利用上述定理,显然可以把 n 阶四元数正定(半正定、负定)自共轭矩阵以及复正定(半正定、负定)矩阵的定义予以简化. 但对于实正定(半正定、负定)对称矩阵的定义,“矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵”这一条件是不可缺少的. 因为存在非对称实矩阵 $\boldsymbol{A}$,使得对任意非零 n 维实向量 $\boldsymbol{X}$,$\boldsymbol{XAX}'$均为实数,即使要求 $\boldsymbol{XAX}'>0$,也仍然有这样的实矩阵存在.

参考文献:

[1] 张树青,邹媛媛. 四元数矩阵的复表示与四元数矩阵之迹[J]. 烟台师范学院学报:自然科学版,2003,19(2):16.

[2] 伍俊良,邹黎敏,陈香萍. 四元数体上斜自共轭矩阵的几个定理[J]. 辽宁师范大学学报:自然科学版,2008,31(1):23.

[3] 李艳君,任秋萍,张权. 自共轭四元数矩阵空间的保行列式加法映射[J]. 高师理科学刊,2009(5):38.

[4] 张树清. 关于“四元数自共轭矩阵的几个定理”的注记[J]. 鲁东大学学报,2006(4):19.