

SINS 初始对准 QCDKF 算法研究

郭凌云¹, 丁国强²

(1. 郑州轻工业学院 外语系, 河南 郑州 450002;

2. 郑州轻工业学院 电气信息工程学院, 河南 郑州 450002)

摘要:根据载体姿态四元数描述特点及其计算优势,建立了捷联惯导系统大失准角情形初始对准乘性四元数误差模型.该模型构造姿态矩阵代价函数计算其最大特征值,求取对应特征向量作为预测四元数均值并选择具有单位范数的特征向量来满足预测四元数均值计算保范性和符号不变性要求;利用乘性四元数误差表示四元数 Sigma 点与预测均值四元数间距,进而计算四元数预测误差方差矩阵.结合中心差分滤波(CDKF)算法提出四元数 CDKF 算法(QCDKF),实现大角度失准角情形的 SINS 初始对准仿真研究,与 EKF 算法相比,QCDKF 算法数值计算稳定性较好,姿态误差角和速度误差滤波精度得到明显改善和提高.

关键词:捷联惯导;初始对准;四元数中心差分滤波;乘性误差四元数

中图分类号:V241.62⁺2;TP273⁺.5 **文献标志码:**A **DOI:**10.3969/j.issn.2095-476X.2013.01.021

Quaternion central divided difference Kalman filtering algorithm in initial alignment of SINS

GUO Ling-yun¹, DING Guo-qiang²

(1. Department of Foreign Languages, Zhengzhou University of Light Industry, Zhengzhou 450002, China;

2. College of Electrical and Information Engineering, Zhengzhou University of Light Industry, Zhengzhou 450002, China)

Abstract: Considering the characteristics and computation superiority of quaternion representing body attitude movement, and aiming at the initial alignment procedure of strapdown inertial navigation system (SINS) with large initial misalignment angles, its multiplicative quaternion error model were developed. It proposes the new calculation method in which the attitude matrix cost function was constructed to calculate its maximum eigenvalues, and select the eigenvector which corresponds to the maximum eigenvalue as the predicted quaternion mean to guarantee its unit normalization and the sign invariability. The multiplicative quaternion error representing the distance between quaternion Sigma-points and the predicted quaternion mean calculates the quaternion prediction error variance matrix, which can effectively overcome the application limits for SPKF algorithms in quaternion filtering implementation. Combined with the central divided difference filtering (CDKF) algorithm, it proposes the new quaternion CDKF algorithm (QCDKF) for quaternion filtering problems in the SINS' simulation experiments. The simulations results showed that, compared with EKF algorithm, the proposed algorithm can significantly improve the filtering precision of both attitude misalignment angles and velocity and have better stabilization in the numerical calculation.

Key words: strapdown inertial navigation system (SINS); initial alignment; quaternion central divided difference filtering; multiplicative quaternion error

0 引言

初始对准是捷联惯导 SINS (strapdown inertial navigation system) 系统的关键技术之一,其对准时间和精度是直接影响捷联惯导系统工作性能的重要指标^[1-2],而捷联惯导误差模型和滤波算法在初始对准中起重要作用.常用的 SINS 误差模型主要有 φ 角、 ψ 角、旋转矢量以及四元数等^[3],其中四元数模型以其小计算量、高精度、非奇异性和全姿态工作获得广泛应用.该模型利用四参数分量描述载体姿态运动,参数冗余使误差方差矩阵产生奇异性,四元数通过规范化来保持其姿态矩阵正交性,这限制了它在非线性滤波中的应用^[4].对此,文献[5]将 Rodrigues 参数与四元数相结合,把四元数四参数描述转化为 Rodrigues 三参数表示,利用 Rodrigues 参数来计算预测均值和方差矩阵,从而避免四参数规范化的限制.但这种数学转化增加了计算负担,会延长 SINS 系统初始对准时间.四元数 EKF 姿态更新算法^[6]利用乘性误差四元数来表示四元数 Sigma 点与均值四元数距离,实现误差方差矩阵计算,保证滤波更新后的四元数位于单位球面上.显然,EKF 算法原理上存在的高阶截断误差会对滤波精度造成很大影响,而 Sigma-Points 族滤波算法 (SPKF)^[7]则由于能够有效减小高阶截断误差影响而广泛应用于各种非线性系统中,SPKF 算法包括 Sigma-Points Unscented 变换 Kalman 滤波算法以及中心差分滤波 CDKF (central divided difference kalman filtering) 算法. CDKF 滤波算法设计中实施了状态变量随机解耦操作和误差方差矩阵平方根计算,可确保误差方差矩阵正定性,数值计算稳定性较好,并且计算效率比 EKF 算法高.四元数本质上描述旋转矢量,姿态更新中四元数元素位于旋转空间中,四元数不能进行数学意义上的直接相加或者尺度相乘,因此应用 SPKF 算法计算四元数预测均值时无法采用标准 SPKF 算法中向量加权求和方法.针对四元数加权均值计算问题,奇异值分解算法^[8]计算量较大,无法广泛应用于实际的 SINS 系统;文献[9]提出以姿态矩阵为对象,通过构造姿态矩阵代价函数计算四元数均值实现均值四元数保范性.基于四元数均值和预测方差矩阵的计算方法,利用 CDKF 算

法计算优势,本文提出一种四元数 CDKF 算法 (QC-DKF),应用该算法进行大角度失准角 SINS 初始对准系统状态滤波研究.

1 SINS 初始对准误差模型

1.1 姿态四元数误差方程^[2]

假设 SINS 中理想平台坐标系为 n ,载体坐标系为 b ,真实导航坐标系为 n' ,定义姿态四元数为 $\mathbf{Q} = [\mathbf{q}^T \ q_0]^T$,其中 $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ q_3]^T$,姿态四元数满足规范化限制

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \|\mathbf{Q}\|^2 = \mathbf{q}^T \mathbf{q} + q_0^2 = 1$$

根据文献[4]中的四元数理论, \mathbf{Q} 满足微分方程

$$\dot{\mathbf{Q}} = \frac{1}{2} \mathbf{Q} \otimes \boldsymbol{\omega}_{nb}^b$$

其中,姿态角速率 $\boldsymbol{\omega}_{nb}^b = \boldsymbol{\omega}_b^b - \boldsymbol{\omega}_{in}^b = \boldsymbol{\omega}_b^b - \mathbf{C}_n^b(\mathbf{Q}) \boldsymbol{\omega}_{in}^n$.实际系统姿态角速率由速率陀螺输出角速度 $\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b$ 和数学平台指令角速度 $\hat{\boldsymbol{\omega}}_{in}^b$ 确定,有 $\hat{\boldsymbol{\omega}}_{nb}^b = \hat{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b - \hat{\boldsymbol{\omega}}_{in}^b$,则有解算四元数 $\hat{\mathbf{Q}}$ 微分方程为

$$\dot{\hat{\mathbf{Q}}} = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{Q}} \otimes \hat{\boldsymbol{\omega}}_{nb}^b$$

其中, $\hat{\mathbf{Q}}$ 对应姿态矩阵为 $\mathbf{C}_b^{n'}$.根据它们的等价关系,可得到 $\mathbf{C}_b^{n'} = \mathbf{C}_b^{n'} \mathbf{C}_b^b$ 对应四元数

$$\hat{\mathbf{Q}} = \delta \mathbf{Q}^{-1} \otimes \mathbf{Q} \quad (1)$$

其中 $\delta \mathbf{Q}$ 是由 $\hat{\mathbf{Q}}$ 引起的姿态误差四元数,整理式①得到

$$\delta \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \otimes \hat{\mathbf{Q}}^{-1}$$

对其两边求导整理得

$$\begin{aligned} \delta \dot{\mathbf{Q}} = & -\frac{1}{2} \mathbf{Q} \otimes \delta \hat{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \otimes \mathbf{Q}^{-1} \otimes \mathbf{Q} \otimes \hat{\mathbf{Q}}^{-1} + \\ & \frac{1}{2} \mathbf{Q} \otimes \hat{\mathbf{Q}}^{-1} \otimes \hat{\mathbf{Q}} \otimes \hat{\boldsymbol{\omega}}_{in}^b \otimes \hat{\mathbf{Q}}^{-1} - \\ & \frac{1}{2} \mathbf{Q} \otimes \boldsymbol{\omega}_{in}^b \otimes \mathbf{Q}^{-1} \otimes \mathbf{Q} \otimes \hat{\mathbf{Q}}^{-1} \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $\delta \hat{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b = \boldsymbol{\omega}_{ib}^b - \hat{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b$.根据四元数坐标变换公式 $\mathbf{r}^n = \mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}^b \otimes \mathbf{Q}^{-1}$,则存在关系式

$$\begin{cases} \delta \hat{\boldsymbol{\omega}}_{in}^n = \mathbf{Q} \otimes \delta \hat{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \otimes \mathbf{Q}^{-1} \\ \boldsymbol{\omega}_{in}^n = \mathbf{Q} \otimes \boldsymbol{\omega}_{in}^b \otimes \mathbf{Q}^{-1} \\ \hat{\boldsymbol{\omega}}_{in}^n = \hat{\mathbf{Q}} \otimes \hat{\boldsymbol{\omega}}_{in}^b \otimes \hat{\mathbf{Q}}^{-1} \end{cases} \quad (3)$$

把式③代入式②中整理可得

$$\delta\hat{Q} = -\frac{1}{2}\delta\hat{\omega}_{ib}^n \otimes Q \otimes \hat{Q}^{-1} + \frac{1}{2}Q \otimes \hat{Q}^{-1} \otimes \hat{\omega}_{in}^n - \frac{1}{2}\omega_{in}^n \otimes Q \otimes \hat{Q}^{-1} \quad (4)$$

将式①代入式④,可得四元数姿态误差方程

$$\delta\hat{Q} = -\frac{1}{2}\delta\hat{\omega}_{ib}^n \otimes \delta Q + \frac{1}{2}\delta Q \otimes \hat{\omega}_{in}^n - \frac{1}{2}\omega_{in}^n \otimes \delta Q$$

1.2 速度误差方程

根据文献[2],载体速度误差方程表达式为

$$\delta\dot{V}^n = \delta C_b^n f^b - (2\hat{\omega}_{ie}^n + \hat{\omega}_{en}^n [\delta V^n \times] + C_b^n \delta f^b + [V^n \times] (2\delta\hat{\omega}_{ie}^n + \delta\hat{\omega}_{en}^n)) + \delta\hat{g}^n \quad (5)$$

其中 $[V^n \times]$ 和 $[\delta V^n \times]$ 表示矢量叉乘.根据关系式

$$\delta C_b^n \equiv C_b^{n'} - C_b^n = C_b^{n'} C_b^n - C_b^n = (C_n^{n'} - I) C_b^n$$

整理式⑤得到

$$\delta\dot{V}^n = (C_n^{n'} - I) C_b^n f^b - (2\hat{\omega}_{ie}^n + \hat{\omega}_{en}^n [\delta V^n \times] + C_b^n \delta f^b + [V^n \times] (2\delta\hat{\omega}_{ie}^n + \delta\hat{\omega}_{en}^n)) + \delta\hat{g}^n \quad (6)$$

其中姿态矩阵应用四元数表示为

$$C_b^n(Q) = (q_0^2 - q^T q) I_{3 \times 3} + 2qq^T + 2q_0[q \times]$$

这里, $\delta f^b = \hat{f}^b - f^b$, $\delta\hat{g}^n = \hat{g}^n - g^n$, $\delta\hat{\omega}_{ie}^n = \hat{\omega}_{ie}^n - \omega_{ie}^n$, $\delta\hat{\omega}_{en}^n = \hat{\omega}_{en}^n - \omega_{en}^n$.

1.3 量测方程

取东向和北向水平速度误差为量测量,系统量测方程为

$$z = Hx(t) + v(t) \quad (7)$$

其中 $z = [\delta V_E \quad \delta V_N]^T$, $H = [I_{2 \times 2} \quad 0_{2 \times 8}]$, $v(t) \sim N(0, R)$.

2 四元数中心差分滤波(QCDKF)算法

2.1 四元数加权均值计算

对于 n 个四元数 Q_i ,若有相应权值 w_i ,若采用公式

$$\bar{Q}_{av} = (\sum_{i=1}^n w_i)^{-1} \sum_{i=1}^n w_i Q_i \quad (8)$$

直接求取这 n 个四元数 Q_i 加权均值,其中存在的明显问题是 \bar{Q}_{av} 可能不是规范四元数;另外,在四元数理论中 Q 和 $-Q$ 表示相同矢量旋转,也就是说四元数符号改变不应该影响四元数加权均值计算结果,显然根据式⑧获得的均值四元数计算结果不能满足这一要求.

根据四元数与载体姿态矩阵关系,均值四元数是姿态矩阵误差平方 Frobenius 范数(F -范数)加权和值最小化矢量表示,这里给出一种以姿态矩阵为对象解决加权均值四元数的计算方法.

姿态矩阵平方 F -范数可表示为

$$\bar{Q} = \arg \min_{\|Q\|=1} \sum_{i=1}^n w_i \|C_b^n(Q) - C_b^n(Q_i)\|_F^2 \quad (9)$$

其中 w_i 为相应四元数权值, Q_i 为给定四元数样本值, $\|\cdot\|_F^2$ 表示平方 F -范数.

根据 F -范数定义可得

$$\begin{aligned} \|C_b^n(Q) - C_b^n(Q_i)\|_F^2 &= \text{tr}([(C_b^n(Q) - C_b^n(Q_i))^T [C_b^n(Q) - C_b^n(Q_i)]]) = \\ &= \text{tr}(C_b^n(Q)^T C_b^n(Q) - C_b^n(Q)^T C_b^n(Q_i) - \\ &C_b^n(Q_i)^T C_b^n(Q) + C_b^n(Q_i)^T C_b^n(Q_i)) \end{aligned} \quad (10)$$

对于任意规范四元数 Q ,根据 $C_b^n(Q)$ 和 $C_b^n(Q_i)$ 正交性,有

$$\begin{aligned} \text{tr}(C_b^n(Q)^T C_b^n(Q)) &\triangleq 3 \\ \text{tr}(C_b^n(Q_i)^T C_b^n(Q_i)) &\triangleq 3 \end{aligned} \quad (11)$$

根据式⑪整理式⑩得到化简结果为

$$\begin{aligned} \|C_b^n(Q) - C_b^n(Q_i)\|_F^2 &= \\ 6 - 2\text{tr}(C_b^n(Q)^T C_b^n(Q_i)) \end{aligned} \quad (12)$$

将式⑫带入式⑨得到四元数加权均值表示式为

$$\begin{aligned} \bar{Q} &= \arg \min_{\|Q\|=1} \sum_{i=1}^n w_i \|C_b^n(Q) - C_b^n(Q_i)\|_F^2 = \\ \arg \min_{\|Q\|=1} \sum_{i=1}^n w_i \{6 - 2\text{tr}(C_b^n(Q)^T C_b^n(Q_i))\} &= \\ \arg \max_{\|Q\|=1} \text{tr}(C_b^n(Q)^T B) \end{aligned}$$

其中, B 是姿态带宽矩阵,它包含了载体姿态运动的全部信息,有

$$B = \sum_{i=1}^n w_i C_b^n(Q_i)$$

将 \bar{Q} 表达式转换为二次型

$$\bar{Q} = \arg \max_{\|Q\|=1} Q^T K Q$$

求解得到

$$K = \begin{bmatrix} B + B^T - \text{tr}(B) I_{3 \times 3} & z \\ z^T & \text{tr}(B) \end{bmatrix}$$

其中, $[z \times] = B^T - B$.求解 K 矩阵涉及四元数与姿态矩阵间相互转化,整理得到关于 K 的简化式

$$K = 4M - w_{\text{tot}} I_{4 \times 4}$$

其中, $M = \sum_{i=1}^n w_i Q_i Q_i^T$, $w_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^n w_i$.加权均值四元数为

$$\bar{Q} = \arg \max_{\|Q\|=1} Q^T M Q$$

2.2 中心差分滤波算法

CDKF 算法理论精度比 EKF 要高^[9],且能保证状态估计误差方差阵的半正定性,从而能够确保滤

波算法数值计算稳定性. 考虑大角度失准角 SINS 初始对准非线性误差系统函数为

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$$

状态变量分为四元数部分和非四元数部分 $\mathbf{x} = [\mathbf{x}^q, \mathbf{x}^e]^T$, 其中, $\mathbf{x}^q = [\delta \mathbf{Q}^T]$ 表示四元数的 4 个分量, $\mathbf{x}^e = [\delta \mathbf{V}^T \nabla^T \boldsymbol{\varepsilon}^T]^T$ 表示 SINS 系统速度误差分量、加速度计偏差分量以及陀螺漂移分量; 它具有均值 $\bar{\mathbf{x}}$ 和协方差 \mathbf{P}_{xx} .

引入辅助变量 \mathbf{z} 对状态变量 \mathbf{x} 实施随机解耦:

$$\mathbf{z} = \mathbf{S}_x^{-1} \mathbf{x}$$

其中 \mathbf{S}_x 是向量 \mathbf{x} 的方差矩阵 \mathbf{P}_{xx} 的 Cholesky 平方根分解因子, 满足 Cholesky 分解 $\mathbf{P}_x = \mathbf{S}_x \mathbf{S}_x^{-1}$, \mathbf{z} 满足

$$\mathbf{P}_z = E([\mathbf{z} - E(\mathbf{z})][\mathbf{z} - E(\mathbf{z})]^T) = \mathbf{I}$$

把辅助变量表达式代入非线性函数中得到

$$f(\mathbf{x}) = \tilde{f}(\mathbf{S}_x^{-1} \mathbf{x}) = \tilde{f}(\mathbf{z})$$

对其实施二阶 Stirling 多项式插值逼近表示为

$$y = \tilde{f}(\bar{\mathbf{z}}) + \frac{1}{h} \left(\sum_{p=1}^n \Delta z_p \mu_p \delta_p \right) \tilde{f}(\bar{\mathbf{z}}) + \frac{1}{h^2} \left(\sum_{p=1}^n \Delta z_p^2 \delta_p^2 + \sum_{p=1}^n \sum_{q=1, q \neq p}^n \Delta z_p \Delta z_q (\delta_p \mu_p) (\delta_q \mu_q) \right) \tilde{f}(\bar{\mathbf{z}})$$

其中, n 是系统状态变量维数; h 是插值步长, 对于高斯分布来说 $h = \sqrt{3}$; δ_p 和 μ_p 分别表示偏差因子和偏差平均因子, 其表达式为

$$\delta_p \tilde{f}(\bar{\mathbf{z}}) = \tilde{f}(\bar{\mathbf{z}} + h\mathbf{e}_p) - \tilde{f}(\bar{\mathbf{z}} - h\mathbf{e}_p)$$

$$\mu_p \tilde{f}(\bar{\mathbf{z}}) = (1/2) \{ \tilde{f}(\bar{\mathbf{z}} + h\mathbf{e}_p) + \tilde{f}(\bar{\mathbf{z}} - h\mathbf{e}_p) \}$$

其中, \mathbf{e}_p 表示由向量 \mathbf{z} 扩展生成状态空间中沿坐标轴的单位向量.

假设 $\Delta \mathbf{z}$ 具有零均值 Gaussian 分布, 可以得到 \tilde{f} 的二阶均值表达式为

$$\bar{y} \approx E[\tilde{f}(\bar{\mathbf{z}}) + \tilde{D}_{\Delta z} \tilde{f} + \frac{1}{2!} \tilde{D}_{\Delta z}^2 \tilde{f}] = \frac{h^2 - n}{h^2} \tilde{f}(\bar{\mathbf{z}}) + \frac{1}{2h^2} \sum_{p=1}^n [\tilde{f}(\bar{\mathbf{z}} + h\mathbf{e}_p) + \tilde{f}(\bar{\mathbf{z}} - h\mathbf{e}_p)]$$

根据 $f(\mathbf{x}) = \tilde{f}(\mathbf{S}_x^{-1} \mathbf{x}) = \tilde{f}(\mathbf{z})$ 可以获得 $f(\mathbf{x})$ 的二阶均值计算式

$$\bar{y} = \frac{h^2 - n}{h^2} f(\bar{\mathbf{x}}) + \frac{1}{2h^2} \sum_{p=1}^n [f(\bar{\mathbf{x}} + h\mathbf{s}_{x,p}) + f(\bar{\mathbf{x}} - h\mathbf{s}_{x,p})] \quad (13)$$

根据方差矩阵计算公式, 把 \tilde{f} 的二阶插值公式代入获得二阶方差矩阵表达式, 进一步整理得到 f 的二阶方差矩阵计算式

$$\mathbf{P}_{yy} = \frac{1}{4h^2} \sum_{p=1}^n [f(\bar{\mathbf{x}} + h\mathbf{s}_{x,p}) - f(\bar{\mathbf{x}} - h\mathbf{s}_{x,p})][f(\bar{\mathbf{x}} +$$

$$h\mathbf{s}_{x,p}) - f(\bar{\mathbf{x}} - h\mathbf{s}_{x,p})]^T + \frac{h^2 - 1}{4h^2} \sum_{p=1}^n [f(\bar{\mathbf{x}} + h\mathbf{s}_{x,p}) + f(\bar{\mathbf{x}} - h\mathbf{s}_{x,p}) - 2f(\bar{\mathbf{x}})][f(\bar{\mathbf{x}} + h\mathbf{s}_{x,p}) + f(\bar{\mathbf{x}} - h\mathbf{s}_{x,p}) - 2f(\bar{\mathbf{x}})]^T + \mathbf{Q}$$

按照类似步骤计算 $f(\mathbf{x})$ 的二阶协方差矩阵为

$$\mathbf{P}_{xy} \approx E\left\{ (\mathbf{S}_x \Delta \mathbf{z}) \left(\tilde{D}_{\Delta z} \tilde{f} + \frac{1}{2} \tilde{D}_{\Delta z}^2 \tilde{f} - E\left[\frac{1}{2} \tilde{D}_{\Delta z}^2 \tilde{f} \right] \right)^T \right\} = E\left\{ (\mathbf{S}_x \Delta \mathbf{z}) (\tilde{D}_{\Delta z} \tilde{f})^T \right\} = \frac{1}{2h} \sum_{p=1}^n \mathbf{s}_{x,p} [\tilde{f}(\bar{\mathbf{z}} + h\mathbf{e}_p) - \tilde{f}(\bar{\mathbf{z}} - h\mathbf{e}_p)]^T$$

对其进一步整理得到其计算公式为

$$\mathbf{P}_{xy} = \frac{1}{2h} \sum_{p=1}^n \mathbf{s}_{x,p} [f(\bar{\mathbf{x}} + h\mathbf{s}_{x,p}) - f(\bar{\mathbf{x}} - h\mathbf{s}_{x,p})]^T$$

2.3 SINS 初始对准 QCDKF 算法

状态参数初始化和初始方差矩阵的 Cholesky 分解操作如下:

$$E(\mathbf{x}_0) = \hat{\mathbf{x}}_0$$

$$\mathbf{P}_0 \equiv \text{cov}(\mathbf{x}_0) = E((\hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0)(\hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0)^T)$$

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{S}_{x,0} \mathbf{S}_{x,0}^T$$

2.3.1 选取 $k-1$ 时刻 Sigma 点和权值 把 $k-1$ 时刻 Sigma 点分为四元数和非四元数 2 部分向量 $\boldsymbol{\chi}_{k-1} = [\boldsymbol{\chi}_{k-1}^q \quad \boldsymbol{\chi}_{k-1}^e]^T$. 计算四元数部分向量 $\boldsymbol{\chi}_k^q$

$$\boldsymbol{\chi}_{0,k-1}^q = \hat{\mathbf{Q}}_{k-1}^+$$

$$\boldsymbol{\chi}_{i,k-1}^q = \delta \boldsymbol{\chi}_{i,k-1}^q \otimes \hat{\mathbf{Q}}_{k-1}^+ \quad i = 1, \dots, n$$

$$\boldsymbol{\chi}_{i,k-1}^q = (\delta \hat{\boldsymbol{\chi}}_{i,k-1}^q)^{-1} \otimes \hat{\mathbf{Q}}_{k-1}^+ \quad i = n+1, \dots, 2n$$

根据 CDKF 算法计算非四元数部分向量的 Sigma 点

$$\boldsymbol{\chi}_{0,k-1}^e = \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^e$$

$$\boldsymbol{\chi}_{i,k-1}^e = \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^e + [h\mathbf{S}_{x,k-1}]_i \quad i = 1, \dots, n$$

$$\boldsymbol{\chi}_{i,k-1}^e = \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^e - [h\mathbf{S}_{x,k-1}]_i \quad i = n+1, \dots, 2n$$

根据 Stirling 插值计算结果, 定义 Sigma 点对应均值和方差权值:

$$\mathbf{W}_0^{(m)} = (h^2 - n)/h^2 \quad \mathbf{W}_i^{(c_1)} = 1/4h^2$$

$$\mathbf{W}_i^{(m)} = 1/2h^2 \quad \mathbf{W}_i^{(c_2)} = (h^2 - 1)/4h^4$$

其中, $i = 1, \dots, 2n$.

2.3.2 时间更新 由非线性状态方程 $\boldsymbol{\chi}_{i,k-1} = f(\boldsymbol{\chi}_{i,k-1})$ 确定状态变量预测均值和方差, 根据式 (13) 计算四元数部分的预测加权均值四元数

$$\hat{\boldsymbol{\chi}}_{kl,k-1}^q = \arg \max \boldsymbol{\chi}_{i,k-1}^q \mathbf{M}(\boldsymbol{\chi}_{i,k-1}^q)^T$$

其中 $\mathbf{M} = \sum_{i=0}^{2n} \mathbf{w}_i \boldsymbol{\chi}_{i,k-1}^q (\boldsymbol{\chi}_{i,k-1}^q)^T$. 非四元数部分按照 CDKF 算法计算预测均值

$$\hat{\boldsymbol{\chi}}_{kl,k-1}^e = \sum_{i=0}^{2n} \mathbf{W}_i^{(m)} \boldsymbol{\chi}_{i,k-1}^e$$

四元数方差也不能在向量空间内计算,可采用乘性误差四元数 $\delta\chi_{i,klk-1}^q$ 来表示状态预测值 $\chi_{i,klk-1}^q$ 到预测均值 $\hat{\chi}_{klk-1}^q$ 之间的距离,从而获得四元数状态预测误差协方差矩阵 P_{klk-1}^q

$$\delta\chi_{i,klk-1}^q = \hat{\chi}_{klk-1}^q \otimes (\chi_{i,klk-1}^q)^{-1}$$

$$P_{klk-1}^q = \sum_{i=0}^n [W_i^{(c1)} \delta\chi_{i,klk-1}^q (\delta\chi_{i,klk-1}^q)^T + W_i^{(c2)} \delta\chi_{i,klk-1}^q (\delta\chi_{i,klk-1}^q)^T] + Q_{k-1}^q$$

非四元数部分状态向量预测误差协方差矩阵为

$$P_{klk-1}^e = \sum_{i=0}^n [W_i^{(c1)} (\chi_{i,klk-1}^e - \chi_{n+i,klk-1}^e)^2 + W_i^{(c2)} (\chi_{i,klk-1}^e + \chi_{n+i,klk-1}^e - 2\chi_{0,klk-1}^e)^2] + Q_{k-1}^e$$

Sigma 点更新计算为

$$\chi_{klk-1}^* = [\hat{\chi}_{klk-1} \hat{\chi}_{klk-1} + h \sqrt{P_{klk-1}} \hat{\chi}_{klk-1} - h \sqrt{P_{klk-1}}]$$

2.3.3 测量更新 根据系统观测方程式 (7),选取的观测量中没有四元数,观测量的均值和方差计算可以根据 CDKF 步骤进行.通过观测方程 $z_{i,klk-1} = h(\chi_{i,klk-1}^*)$ 计算观测预测均值及方差

$$\hat{z}_{klk-1} = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(m_i)} z_{i,klk-1}$$

$$P_{xz,k}^q = \sum_{i=0}^n [W_i^{(c1)} \delta\chi_{i,klk-1}^q (z_{i,klk-1} - \hat{z}_{klk-1})^T + \omega_i^{(c2)} \delta\chi_{i,klk-1}^q (z_{i,klk-1} - \hat{z}_{klk-1})^T]$$

$$P_{xz,k}^e = \sqrt{W_1^{(c2)} P_{klk-1}^e} (z_{1,n,klk-1} - z_{n+1,2n,klk-1})^T$$

$$P_{zz,k} = \sum_{i=0}^n [W_i^{(c1)} (z_{i,klk-1} - z_{n+i,klk-1})^2 + W_i^{(c2)} (z_{i,klk-1} + z_{n+i,klk-1} - 2z_{0,klk-1})^2] + R_k$$

2.3.4 状态更新 状态增益矩阵 $K_k = P_{xz,k} P_{zz,k}^{-1}$, 状态误差方差矩阵

$$P_{klk} = P_{klk-1} - K_k P_{zz,k}^{-1} K_k^T$$

四元数更新采用乘性误差四元数计算获得

$$\hat{\chi}_{klk}^q = \delta\hat{\chi}_{klk}^q \otimes (\hat{\chi}_{klk-1}^q)^{-1}$$

其中 $\delta\hat{\chi}_{klk}^q = [\delta q_0, \delta q^T]^T, \delta q = K_k (z_k - \hat{z}_{klk-1})$,

$$\delta q_0 = \sqrt{1 - \delta q^T \delta q}$$

非四元数部分状态更新为

$$\hat{\chi}_{klk}^e = \hat{\chi}_{klk-1}^e + K_k (z_k - \hat{z}_{klk-1})$$

3 仿真研究

针对 SINS 系统方程 (6)(7) 和观测方程 (9),利用舰船三轴摇摆运动模型进行 QCDKF 和 EKF 算法的海上对准仿真研究^[3].舰船纵摇、横摇和航向幅度分别为 5°,4°和 3°,摇摆频率分别是 0.05 Hz,0.10 Hz

和 0.05 Hz,初始角设为 0°,0°和 90°;舰船东向和北向初始速度取值为 10 m/s,其所处地理位置为北纬 45.6°,东经 126.75°.系统状态 x 初始值 $x_0 = [(\chi_0^q)^T (\chi_0^e)^T]^T, \chi_0^q = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$,为验证 SINS 系统模型的滤波鲁棒性,初始姿态误差角设为 10°,15°和 60°.陀螺常值漂移为 1°/h,随机漂移 0.02°/h,加速度计初始偏差设置为 10⁻³g,随机漂移为 10⁻⁴g.忽略惯性器件安装误差以及刻度因子误差,速度测量误差设为 [0.01 m/s 0.01 m/s]^T.初始状态向量的方差矩阵取为

$$P_0 = \text{diag}(0.5^2, 0.5^2, 0.5^2, 0.5^2, 0.01^2, 0.01^2, (10^{-4}g)^2, (10^{-4}g)^2, (0.02^\circ/h)^2, (0.02^\circ/h)^2, (0.02^\circ/h)^2)$$

系统过程噪声方差矩阵 Q 和量测噪声方差矩阵 R 分别为

$$Q = \text{diag}(10^{-4}g)^2, (10^{-4}g)^2, (0.02^\circ/h)^2, (0.02^\circ/h)^2, (0.02^\circ/h)^2$$

$$R = \text{diag}((0.01)^2, (0.01)^2)$$

分别采用 EKF 和 QCDKF 这 2 种滤波方法进行大角度失准角 SINS 初始对准仿真研究,利用 EKF 算法仿真获得的 SINS 系统姿态失准角估计误差数据如图 1 所示,利用 QCDKF 算法获得 SINS 系统姿态失准角估计误差数据如图 2 所示,应用 EKF 和 QCDKF 算法获得的东向和北向速度估计误差数据如图 3 所示.表 1 给出了 QCDKF 和 EKF 这 2 种算法计算获得的 3 个姿态误差角分量和 2 个速度误差估计精度对比数据.由姿态失准角估计误差计算仿真图形和统计数据表 1 可知:当水平失准角为小角度时,与 QCDKF 算法相比,EKF 算法获得的对准精度略有降低,但仍然能够取得较高的对准精度,这是

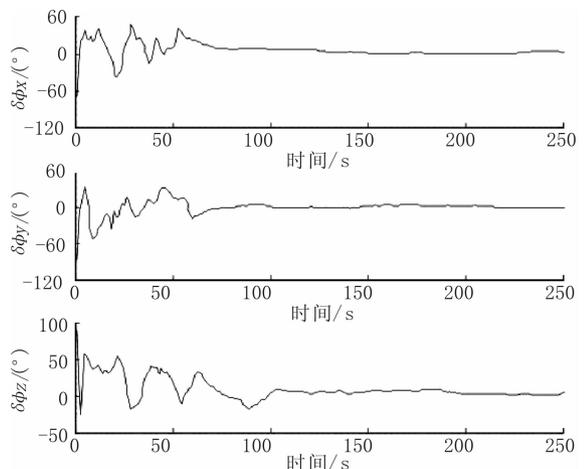


图 1 应用 EKF 算法计算的姿态失准角误差估计曲线

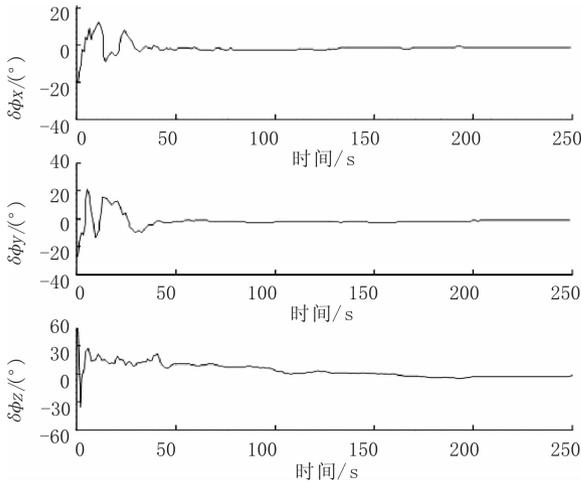


图2 应用 QCDKF 算法计算的姿态失准角误差估计曲线

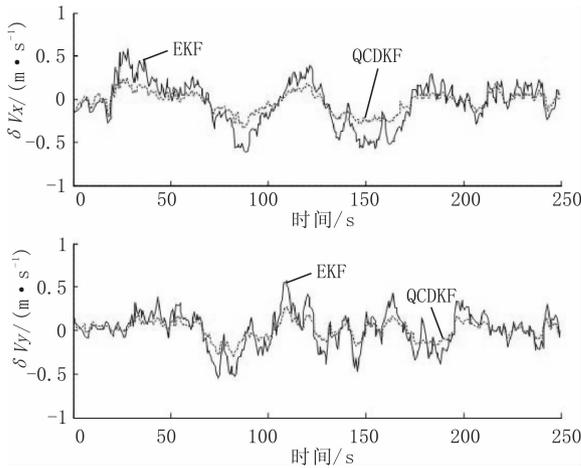


图3 应用 EKF 和 QCDKF 算法计算的东向和北向速度误差估计曲线

表1 QCDKF 和 EKF 算法获得的估计精度数据对照表

算法	$\delta\varphi_x$	$\delta\varphi_y$	$\delta\varphi_z$	δV_x	δV_y
QCDKF	0.16'	-0.32'	1.37'	0.09 m/s	0.04 m/s
EKF	3.1'	2.3'	7.4'	0.42 m/s	0.59 m/s

因为在姿态误差角为小角度时,EKF 算法的高阶截断误差相对较小,对滤波精度影响不明显;而当姿态误差角为大角度时,QCDKF 比 EKF 算法的估计精度显著提高,因为此时 SINS 模型存在的强烈非线性给 EKF 算法带来较大影响,而基于中心差分计算的 QCDKF 算法则能够以更高的精度估计 SINS 非线性系统的后验均值和估计误差方差矩阵,从而有效提高了 SINS 系统滤波精度;另外从仿真数据图形可以看出,QCDKF 算法的数值计算稳定性优于 EKF 算法,原因在于 CDKF 算法采用方差矩阵平方根计

算和随机解耦变换,能够确保估计误差方差矩阵的正定性,从而保证滤波算法的数值计算稳定性. 仿真数据说明非线性四元数误差模型中 QCDKF 算法能够较好地解决 SINS 在大失准角情形下非线性初始对准问题.

4 结论

本文利用乘性四元数建立大角度初始对准失准角 SINS 系统误差方程,结合非线性系统 CDKF 滤波算法,提出四元数中心差分滤波(QCDKF)算法. 通过构造姿态矩阵代价函数计算其最大特征值求取对应的特征向量作为预测四元数均值,并选择具有单位范数的特征向量来满足预测四元数均值计算规范性和符号不变性要求. 利用乘性四元数误差表示四元数 Sigma 点与预测四元数均值距离计算四元数预测误差方差矩阵,克服了 Sigma 点滤波算法在四元数滤波的应用局限性. 仿真结果表明该算法具有较高的对准精度和更好的数值计算稳定性.

参考文献:

- [1] Britting K R. Inertial Navigation System Analysis[M]. New York: New York Wiley-Interscience,1971.
- [2] Chung D Y, Lee J G. Comparison of SDINS in-flight alignment using equivalent error models[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems,1999,35(3): 1046.
- [3] Crassidis J L, Markley F L. Unscented filtering for spacecraft attitude estimation[J]. Journal of Guidance Control and Dynamics,2003,26(4):536.
- [4] Egziabher D G, Hayward R. Design of multi-sensor attitude determination systems[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2004,40(2):627.
- [5] Choukroun D, IBar-Itzhack, Oshman Y. Novel quaternion kalman filter[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems,2006,42(1):174.
- [6] Markley F L, Cheng Y, Crassidis J L, et al. Averaging quaternions[J]. Journal of Guidance Control and Dynamics,2007,30(4):1193.
- [7] 丁国强,周卫东,郝燕玲. 传递对准系统乘性四元数误差模型的 QCDKF 滤波研究[J]. 华中科技大学学报:自然科学版,2010(8):86.
- [8] 丁国强,周卫东,郝燕玲. 传递对准的 MRP-CDKF 算法[J]. 华中科技大学学报:自然科学版,2011(1):129.
- [9] Oshman Y, Carmi A. Attitude estimation from vector observations using genetic-algorithm-embedded quaternion particle filter[J]. Journal of Guidance Control and Dynamics,2006,29(4):879.