第28卷　第2期
2013年4月

郑州轻工业学院学报(自然科学版)
JOURNAL OF ZHENGZHOU UNIVERSITY OF LIGHT INDUSTRY(Natural Science)

Vol.28　No.2
Apr.　2013

文章编号:2095-476X(2013)02-0106-03

一类可以对角化的矩阵

秦建国，　谢栋梁，　王静娜

(郑州轻工业学院 数学与信息科学系，河南 郑州 450002)

摘要:利用共轭转置矩阵和Hermite矩阵等概念,发现并证明了一类可以对角化的矩阵,给出了其对角形的具体表示和一些其他结论.

关键词:Hermite矩阵;共轭矩阵;矩阵对角化

中图分类号:O151.21　　**文献标志码**:A　　DOI:10.3969/j.issn.2095-476X.2013.02.025

A set of diagonalization matrix

QIN Jian-guo，　XIE Dong-liang，　WANG Jing-na

(*Department of Mathematics and Information Science*, *Zhengzhou University of Light Industry*, *Zhengzhou* 450002, *China*)

Abstract: Using the concepts of conjugate, transposed and Hermite matrix, a set of matrix which can be diagonalized is found and their diagonal forms and other conclusion are obtained.

Key words: Hermite matrix; conjugate matrix; the diagonalization of a matrix

0　引言

矩阵理论与方法已成为现代科技领域必不可少的工具,数值分析、微分方程、概率统计、力学、网络等学科与矩阵理论有着密切的联系. 共轭转置矩阵,特别是Hermite矩阵的正定、半正定,在解析函数插值问题的研究中,成为判定一些插值问题是否有解、是否有无穷多解的一个关键[1],目前已有重要研究成果[2-3]. 本文拟利用共轭转置矩阵,特别是Hermite矩阵和正规矩阵等概念和理论,给出一类特殊的正规矩阵,即一类可以对角化的矩阵,并给出了其对角形的具体表示和一些其他结论.

1　主要结论

定义　设 $\boldsymbol{A}=(a_{i,j})\in C^{n\times n}$,记 $\boldsymbol{A}^*=\overline{\boldsymbol{A}^T}$,若

$$\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 是一个Hermite矩阵.

在矩阵论中,Hermite矩阵 $\boldsymbol{A}$ 具有许多好的性质,例如,它的特征值都是实数,属于它的不同特征值的特征向量彼此正交,它可以对角化等. 研究发现,适合条件 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^2$ 的矩阵也有许多好的性质,有助于进一步的研究.

本文约定:用 $\boldsymbol{\sigma}(A)=\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s\}$ 表示方阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有两两不同的特征值形成的集合,即 $\boldsymbol{A}$ 的谱,$\rho(\boldsymbol{A})=\max\{|\lambda_1|,|\lambda_2|,\cdots,|\lambda_s|\}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径.

定理1　若 $\boldsymbol{A}=(a_{i,j})\in C^{n\times n}$,$\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^2$,则 $\boldsymbol{A}$ 可以对角化.

证明　因为当 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^2$ 时,

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* \quad ①$$

这表明 $\boldsymbol{A}$ 是一个正规矩阵. 从而 $\boldsymbol{A}$ 酉相似于一个对角矩阵[4].

定理2　设 $\boldsymbol{A}=(a_{i,j})\in C^{n\times n}$,若 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^2$,则

收稿日期:2013-01-15

基金项目:国家自然科学基金项目(11201433)

作者简介:秦建国(1957—),男,河南省汤阴县人,郑州轻工业学院教授,主要研究方向为矩阵理论及应用.

$\sigma(\boldsymbol{A}) \subset \left\{0,1,\frac{-1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$.

证明　设 $\lambda = a + bi, a, b \in R$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值,$x \neq 0$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的一个特征向量,于是有

$$\boldsymbol{A}x = \lambda x$$

再利用酉线性空间中向量的内积的知识,有

$$\langle \boldsymbol{A}^2 x, x\rangle = \langle \lambda^2 x, x\rangle = \lambda^2 \langle x, x\rangle$$

$$\langle \boldsymbol{A}^* x, x\rangle = x^*(\boldsymbol{A}^* x) = x^* \boldsymbol{A}^* x = (\boldsymbol{A}x)^* x = (\lambda x)^* x = \bar{\lambda} x^* x = \bar{\lambda}\langle x, x\rangle \quad ②$$

因为 $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^2$,故由①②两式可得 $\lambda^2\langle x,x\rangle = \bar{\lambda}\langle x,x\rangle$,但 $\langle x,x\rangle \neq 0$,从而

$$\lambda^2 = \bar{\lambda} \quad ③$$

式③表示

$$(a + bi)^2 = a - bi$$

即

$$a = a^2 - b^2 \qquad 2ab = -b \quad ④$$

这时有

a) 若 $b = 0, \lambda \in R$, 由④式可得 $a = a^2, a = 0,1 \in \sigma(\boldsymbol{A})$;

b) 若 $b \neq 0, \lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i \in \sigma(\boldsymbol{A})$;

c) 一般地,有

$$\sigma(\boldsymbol{A}) \subset \left\{0,1,\frac{-1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\} \quad ⑤$$

定理3　适合条件 $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^2$ 的矩阵的谱半径 $\rho(\boldsymbol{A}) = 1$.

证明　由式⑤立得.

定理4　设 $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^2 \in C^{n\times n}, \sigma(\boldsymbol{A}) = \{0,1\}$,则

(Ⅰ) $\boldsymbol{A}$ 是幂等矩阵;

(Ⅱ) $\boldsymbol{A}$ 是 Hermite 矩阵.

证明　(Ⅰ) 若 $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^2, \sigma(\boldsymbol{A}) = \{0,1\}$,由定理4可知,$\boldsymbol{A}$ 可以对角化. $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式有如下形式:

$$m(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)$$

于是有

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}) = 0 \qquad \boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$$

即 $\boldsymbol{A}$ 是幂等矩阵. 此时,下述d)—g)均成立[5]:

d) $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$;

e) $r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{A} - E) = n$;

f) 存在 $r \times n$ 行满秩矩阵 $\boldsymbol{B}$ 和 $n \times r$ 列满秩矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{CB} \qquad \boldsymbol{BC} = \boldsymbol{E}$$

g) $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A})$.

此外,利用矩阵函数理论,还可以得到关于矩阵函数的一些有趣的结论.

h) $e^{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{I} + (e - 1)\boldsymbol{A}$

事实上,因为 $\boldsymbol{A}$ 可以对角化,便存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}diag[1,1,\cdots,1,0,0,\cdots,0]\boldsymbol{P}^{-1}$. 按照Jordan标准形理论以及矩阵函数理论,有

$$e^{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{P}diag[e,e,\cdots,e,1,1,\cdots,1]\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}diag[1,1,\cdots,1]\boldsymbol{P}^{-1} + (e-1)\boldsymbol{P}diag[1,1,\cdots,1,0,0,\cdots,0]\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{I} + (e-1)\boldsymbol{A}$$

i) $\sin\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\sin 1$.

事实上,依据和上述h)一样的理论,有

$$\sin\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}diag[\sin 1,\sin 1,\cdots,\sin 1,0,0,\cdots,0]\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{A}\sin 1$$

类似地,可得 $\cos\boldsymbol{A}$, $\mathrm{Ln}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})$ 等的表达式.

(Ⅱ) 因为 $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^2$,由(Ⅰ)可知 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$,推得

$$\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}$$

此即 $\boldsymbol{A}$ 是 Hermite 矩阵,而且是半正定的. 此时,$\boldsymbol{A}$ 有以下性质[4]:

j) $\boldsymbol{A} + \varepsilon\boldsymbol{I} > 0, \forall\ \varepsilon > 0$;

k) $\boldsymbol{A}$ 的所有主子阵的特征值均为非负数;

l) $\boldsymbol{A}$ 的所有主子式均为非负数;

m) 对 $k = 1,\cdots,n$, $\boldsymbol{A}$ 的所有 k 阶主子式之和为非负数;

n) 存在 $\boldsymbol{C} \in \boldsymbol{C}^{n\times n}$(或 $R^{n\times n}$)使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{CC}^*$.

定理5　设 $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^2 \in \boldsymbol{C}^{n\times n}, \lambda, \mu \in \sigma(\boldsymbol{A})$ 不相等, 则 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ, μ 的特征向量是正交的.

证明　设 λ, μ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的2个不同的特征值, x_1, x_2 是对应的特征向量,则有 $\boldsymbol{A}x_1 = \lambda x_2, \boldsymbol{A}x_2 = \mu x_2$,于是

$$\lambda^2\langle x_1,x_2\rangle = \langle \lambda^2 x_1, x_2\rangle = \langle \boldsymbol{A}^2 x_1, x_2\rangle = \langle \boldsymbol{A}^* x_1, x_2\rangle = \langle x_1, \boldsymbol{A}x_2\rangle = \langle x_1, \mu x_2\rangle = \bar{\mu}\langle x_1, x_2\rangle$$

即 $(\lambda^2 - \bar{\mu})\langle x_1, x_2\rangle = 0$.

但这种 $\boldsymbol{A}$ 至多有4个两两不同的特征值,它们分别是 $0,1,\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$,经计算易知,必然 $\lambda^2 \neq \bar{\mu}$,故 $\langle x_1, x_2\rangle = 0$,也即

$$x_1 \perp x_2$$

定理6　在定理2中,有

o) 若 $\sigma(\boldsymbol{A}) = \{0,1\}$,则存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = diag[0,0,\cdots,0,1,1,\cdots,1]$$

p) 若 $\sigma(\boldsymbol{A}) = \left\{\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$,则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = diag[\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}i),\cdots,\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}i),\frac{-1}{2}(1+\sqrt{3}i),\cdots,\frac{-1}{2}(1+\sqrt{3}i)]$$

q) 若 $\sigma(\boldsymbol{A}) = \left\{0,1,\frac{-1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$, 则存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使得

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = diag[\lambda_1,\cdots,\lambda_r,\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}i),\cdots,\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}i),\frac{-1}{2}(1+\sqrt{3}i),\cdots,\frac{-1}{2}(1+\sqrt{3}i)]$$

其中,λ_i 非 0 即 1, $i = 1,2,\cdots,r$.

在定理6中,o) 和 p) 中的 $\boldsymbol{Q}$ 可以通过矩阵的初等列变换获得. 下面仅就 p) 的情况说明如下[6].

对矩阵$\begin{bmatrix}\left(\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{E}\end{bmatrix}$作初等列变换,得

$$\begin{bmatrix}\left(\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{E}\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{M} & \boldsymbol{C}\end{bmatrix}$$

其中,$r(\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}$ 的列数 $= r((\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$. $\boldsymbol{C}$ 的列向量组线性无关,而且 $\boldsymbol{C}$ 的每一个列向量都是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值$\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 的特征向量,$\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性无关,而且 $\boldsymbol{B}$ 的每一个列向量都是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值$\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 的特征向量.

令 $\boldsymbol{Q} = [\boldsymbol{C},\boldsymbol{B}]$, 则 $\boldsymbol{Q}$ 可逆,且有

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = diag[\frac{-1}{2}(1+\sqrt{3}i),\cdots,\frac{-1}{2}(1+\sqrt{3}i),\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}i),\cdots,\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}i)]$$

2 结语

本文给出了一类可以对角化的矩阵,以及该类矩阵的谱的最大集合. 由于其可以对角化,进一步获得了一些矩阵函数的简洁表达式,还证明了它与 Hermite 矩阵的一些类似的性质,从而得出属于不同特征值 λ,μ 的特征向量是彼此正交的结论. 这些都是一般矩阵所不具备的.

参考文献:

[1] 秦建国,陈公宁,何红亚. Cauchy 矩阵及其相关的插值问题[J]. 数学的实践与认识,2006,36(9):235.

[2] Hu Y J, Chen G N. On rank variation of block matrices generated by Nevanlinna matrix functions [J]. Math Nachr,2009,282(4):611.

[3] Lasarow A. On rank invariance of generalized Schwarz-Pick-Potapov block matrices of matrix-valued Caratheodory functions[J]. Linear Algebra Appl,2006,413(1):36.

[4] 陈公宁. 矩阵理论与应用[M]. 北京:科学出版社,2007:30－37.

[5] 王卿文. 高等代数综论[M]. 香港:香港天马图书有限公司,2000:123.

[6] 刘学鹏. 特殊矩阵的特殊对角化方法研究[J]. 大学数学,2005(5):115.