文章编号:2095-476X(2013)03-0072-03

具有多胞型摄动的时滞系统鲁棒稳定性

杨录山[1], 尚展垒[2], 王东署[3]

(1.解放军信息工程大学 理学院,河南 郑州 450001;
2.郑州轻工业学院 计算机与通信工程学院,河南 郑州 450001;
3.郑州大学 电气工程学院,河南 郑州 450001)

摘要:通过定义一个参数依赖的 Lyapunov 泛函,结合利用逆凸组合技术和一个矩阵不等式松散方法,得到了保守性小且计算复杂度低的鲁棒稳定性判据.算例表明新的判据显著地改进了已有的结果.

关键词:多胞型摄动;时滞系统;鲁棒稳定性;线性矩阵不等式

中图分类号:TP13 **文献标志码**:A DOI:10.3969/j.issn.2095-476X.2013.03.016

Robust stability of delayed systems with polytopic-type uncertainties

YANG Lu-shan[1], SHANG Zhan-lei[2], WANG Dong-shu[3]

(1. *College of Science, Information Engineering University of the People's Liberation Army, Zhengzhou* 450001, *China*;
2. *College of Computer and Communication Engineering, Zhengzhou University of Light Industry, Zhengzhou* 450001, *China*;
3. *School of Electric Engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou* 450001, *China*)

Abstract: By defining a parameter-dependent Lyapunov functional, using a reciprocally convex combination technique and a relax method of linear matrix inequality (LMI), a robust stability criterion with less conservatism and less complexity was obtained. Some numerical examples showed that the new criterion was better than the existing results.

Key words: polytopic-type uncertainty; delayed systems; robust stability; linear matrix inequality (LMI)

0 引言

由于客观事物的运动规律是复杂多样的,在诸如神经网络、电路信号系统、生态系统等许多领域,总是不可避免地存在着时间延迟现象,而且它通常是导致系统不稳定和性能变差的重要根源[1-5].同时,由于数学建模、电器元件、跟踪测量等因素的制约,现实工程中没有准确无误的模型与参数,都会出现相应的摄动[6-7].在参数摄动的情况下如何保证系统的稳定性,这是近年来许多学者研究的重要课题,带有多胞型摄动的时滞线性系统的二次稳定性是其中的问题之一.汤红吉等[6]讨论了具有多胞型摄动的线性切换系统的渐近稳定性.文献[1-2]分别利用自由权矩阵方法,给出了时滞线性系统的稳定性判据.但是,由于交叉积项的上界估计相对保守,文献[1-2]所得结果的保守性有待改进.本文拟针对这一问题进行研究,给出带有多胞型摄动的线性系统二次稳定的充分条件:通过定义一个参数依赖的 Lyapunov 泛函,结合利用逆凸组合技术和一个矩阵不等式松散方法,得到保守性小且计算复杂度低的鲁棒稳定性判据,并以线性矩阵不等式 LMIs(linear matrix inequality)的形式给出,以便于

收稿日期:2013-02-28

基金项目:国家自然科学基金项目(61174085)

作者简介:杨录山(1963—),男,河北省阳原县人,解放军信息工程大学副教授,主要研究方向为微分动力系统.

求解.

1　问题的提出

考虑线性时滞系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \boldsymbol{A}x(t) + \boldsymbol{B}x(t-d(t)) & t > 0 \\ x(t) = \varphi(t) & t \in [-h, 0] \end{cases} \quad ①$$

其中，$x(t) \in R^n$ 表示系统的状态，$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是系统矩阵，时变的时滞 $d(t)$ 满足条件 $0 \leqslant d(t) \leqslant h$ 和 $\dot{d}(t) \leqslant \mu$，这里的 h 和 μ 都是常数.

与文献[1－2]一样，本文中假定系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都含有多胞型的不确定性，它们可以表示为某些已知顶点矩阵的凸组合. 即

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \in \Omega$$

且

$$\Omega = \left\{ (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) : (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = \sum_{j=1}^{r} \xi_j (\boldsymbol{A}_j, \boldsymbol{B}_j), \sum_{j=1}^{r} \xi_j = 1, \xi_j \geqslant 0 \right\} \quad ②$$

其中的 $\boldsymbol{A}_j$ 和 $\boldsymbol{B}_j$ 都是常数矩阵.

注1　文献[1]要求 $|\dot{d}(t)| \leqslant \mu$，文献[2]则要求 $\mu < 1$，本文没有这些限制.

利用自由权矩阵方法，文献[1－2]分别给出了系统①的稳定性判据. 这些判据都可表示为一组线性矩阵不等式. 但是，由于交叉积项的上界估计相对保守，文献[1－2]得到结果的保守性还有待改进；同时，由于引入了很多的自由变量，文献[1－2]得到的结果计算复杂度相对较高. 基于近期的研究成果和线性矩阵不等式技术，笔者将给出系统①的一个新的稳定性判据.

2　主要结果

取 Lyapunov 泛函为

$$V(x_t) = x^T(t)\boldsymbol{P}x(t) + \int_{t-d(t)}^{t} x^T(s)\boldsymbol{U}x(s)\mathrm{d}s + \int_{t-h}^{t} x^T(s)\boldsymbol{Q}x(s)\mathrm{d}s + h\int_{-h}^{0}\int_{t+\theta}^{t} \dot{x}^T(s)\boldsymbol{R}\dot{x}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta$$

利用逆凸组合技术[7]，可得如下引理.

引理1　对于固定的系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，系统①是渐近稳定的，如果存在对称矩阵 $\boldsymbol{P} > 0, \boldsymbol{Q} \geqslant 0, \boldsymbol{U} \geqslant 0, \boldsymbol{R} > 0$ 和矩阵 $\boldsymbol{S}$，使得③④式成立（见脚注①）.

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{S} \\ * & \boldsymbol{R} \end{pmatrix} \geqslant 0 \quad ③$$

注2　利用自由权矩阵方法，文献[1－2]给出了系统①的渐近稳定性条件. 而引理1是利用逆凸组合方法得到的，它不仅涉及较少的自由变量，而且保守性也更小.

基于引理1，笔者引入参数依赖的 Lyapunov 泛函，即可得到如下定理.

定理1　系统①是鲁棒稳定的，如果存在对称矩阵 $\boldsymbol{P}_j > 0, \boldsymbol{Q}_j \geqslant 0, \boldsymbol{U}_j \geqslant 0, \boldsymbol{R}_j > 0$ 和矩阵 $\boldsymbol{S}_j (j = 1, 2, \cdots, r)$，使得

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{R}_j & \boldsymbol{S}_j \\ * & \boldsymbol{R}_j \end{pmatrix} \geqslant 0 \quad ⑤$$

$$\boldsymbol{\Phi}_{ij} + \boldsymbol{\Phi}_{ji} < 0 \quad ⑥$$

成立（$1 \leqslant i \leqslant j \leqslant r$），注释见脚注②.

证明　取引理1中的矩阵 $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{U}, \boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{S}$ 有如下的形式：

$$\boldsymbol{X}(\xi) = \sum_{j=1}^{r} \xi_j \boldsymbol{X}_j \quad ⑦$$

其中 $\boldsymbol{X}$ 代表 $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{U}, \boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{S}$ 中任一个. 将②和⑦代入④得：

---

①
$$\boldsymbol{\Phi} := \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{U} - \boldsymbol{R} & \boldsymbol{P}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{R} - \boldsymbol{S} & \boldsymbol{S} & h\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{R} \\ * & -2\boldsymbol{R} - (1-\mu)\boldsymbol{U} + \boldsymbol{S} + \boldsymbol{S}^T & \boldsymbol{R} - \boldsymbol{S} & h\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{R} \\ * & * & -\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{R} & 0 \\ * & * & * & -\boldsymbol{R} \end{bmatrix} < 0 \quad ④$$

②
$$\boldsymbol{\Phi}_{ij} := \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{ij}^{11} & \boldsymbol{\Phi}_{ij}^{(12)} & \boldsymbol{S}_i & h\boldsymbol{A}_j^T\boldsymbol{R}_i \\ * & -2\boldsymbol{R} - (1-\mu)\boldsymbol{U}_i + \boldsymbol{S}_i + \boldsymbol{S}_i^T & \boldsymbol{R}_i - \boldsymbol{S}_i & h\boldsymbol{B}_j^T\boldsymbol{R}_i \\ * & * & -\boldsymbol{Q}_i - \boldsymbol{R}_i & 0 \\ * & * & * & -\boldsymbol{R}_i \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_{ij}^{(11)} = \boldsymbol{A}_j^T\boldsymbol{P}_i + \boldsymbol{P}_i\boldsymbol{A}_j + \boldsymbol{Q}_i + \boldsymbol{U}_i - \boldsymbol{R}_i \qquad \Phi_{ij}^{(12)} = \boldsymbol{P}_i\boldsymbol{B}_j + \boldsymbol{R}_i - \boldsymbol{S}_i$$

$$\boldsymbol{\Phi}=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\xi_i\xi_j\boldsymbol{\Phi}_{ij}$$

因为

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=i}^{r}\xi_i\xi_j\boldsymbol{\Phi}_{ij}=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=i}^{r}\xi_i\xi_j(\boldsymbol{\Phi}_{ij}+\boldsymbol{\Phi}_{ji})$$

所以,当⑥成立时则必有④成立.类似地,由⑤可以得到③.

注3　为导出系统①的鲁棒稳定性条件,文献[1]利用系统方程引入了自由矩阵 $\boldsymbol{T}_j(j=1,2,3,4)$;而文献[2]则引入了新的矩阵变量 $\boldsymbol{Y}_{ij}(1\leqslant i,j\leqslant r)$.但在推导⑥式时,却没有引入任何新的自由变量.因此,所得到的新判据中计算复杂度较低.

注4　当μ未知或者$\mu\geqslant 1$时,只需令 $\boldsymbol{U}=0$ 和 $\boldsymbol{U}_j=0$,引理1和定理1仍然适用.

3　数值算例

例1　文献[1]考虑如下具有多胞型摄动的时滞系统

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}0 & -0.12+12\rho_m\\ 0 & -0.465-\rho_m\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}0 & -0.12-12\rho_m\\ 0 & -0.465+\rho_m\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix}-0.1 & -0.35\\ 0 & 0.3\end{pmatrix}$$

其中,$\rho_m=0.035$.在保证系统鲁棒稳定的前提下,针对不同的μ,可由文献[1,3]和定理1得到相应的时滞上界(见表1).由表1可知,定理1的保守性相对较小.

表1　对于不同的μ,可得到的 h 的最大值

算例	μ已知		μ未知
	0.5	0.9	
文献[3]	0.465	0.454	0.454
文献[1]	0.559	0.559	0.559
定理1	0.593	0.593	0.593

例2　文献[2]考虑如下具有多胞型摄动的时滞系统:

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}-0.2 & 0\\ 0 & -0.09\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 0 & -2\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix}-1.9 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}-0.1 & 0\\ -0.1 & -0.1\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}_3=\begin{pmatrix}-0.9 & 0\\ -1 & -1.1\end{pmatrix}$$

在保证系统鲁棒稳定的前提下,针对不同的μ,可由文献[2,3]和定理1得到相应的时滞上界(见表2).由表2也可看出,定理1显著地提升了现有的结果.

表2　对于不同的μ,可得到的 h 的最大值

算例	μ		
	0.1	0.5	0.9
文献[3]	3.355	1.808	0.967
文献[2]	3.374	1.838	1.072
定理1	3.402	2.114	1.657

4　结语

本文研究了具有多胞型不确定性的时滞系统鲁棒稳定性问题.分别运用逆凸组合技术和参数依赖的 Lyapunov 泛函给出了解决问题的充分条件.与原有结果相比,新的判据具有保守性小、计算复杂度低等特点,更加易于检验.数值计算结果进一步证实了本文所得稳定性判据的优越性.

参考文献:

[1] He Y,Wang Q G,Xie L,et al. Further improvement of free-weighting matrices technique for systems with time-varying delay[J]. IEEE Transactions on Automatic Control,2007,52(2):293.

[2] Lin C,Wang Q G,Lee T H. A less conservative robust stability test for linear uncertain time-delay systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2006, 51(1):87.

[3] Fridman E,Shaked U. Delay-dependent stability and H_∞ control:Constant and time-varying delays[J]. International Journal of Control,2003,76(1):48.

[4] 孙文安,孙希明,赵军.具有多胞型摄动的线性切换系统的渐近稳定性[J].东北大学学报:自然科学版,2004,25(8):723.

[5] 吕灵灵,段广仁,吴爱国.滞后细胞神经网络的鲁棒无源分析[J].吉林大学学报:工学版,2009,39(4):1007.

[6] 汤红吉,韩彦武,张小丽.一类不确定离散时滞系统的鲁棒镇定[J].南通大学学报:自然科学版,2007,6(3):6.

[7] Park P,Wan Ko J,Jeong C. Reciprocally convex approach to stability of systems with time-varying delays[J]. Automatica,2011,47:235.