第28卷 第3期 2013年6月
郑州轻工业学院学报(自然科学版)
JOURNAL OF ZHENGZHOU UNIVERSITY OF LIGHT INDUSTRY(Natural Science)
Vol. 28 No. 3 Jun. 2013

文章编号:2095-476X(2013)03-0098-04

非奇异 H - 矩阵的一组新判据

崔润卿， 闫学华

(河南理工大学 数学与信息科学学院，河南 焦作 454000)

摘要:从矩阵本身元素出发,就某些论断进行适当改进,给出了非奇异 H - 矩阵新的判别方法. 数值例子表明,新判据比原有结果有更大的适用范围.

关键词:非奇异 H - 矩阵;严格对角占优;不可约对角占优;非零元素链

中图分类号:O151.21 **文献标志码**:A DOI:10.3969/j. issn. 2095-476X. 2013. 03. 023

Some new criterion for nonsingular H-matrices

CUI Run-qing, YAN Xue-hua

(*School of Mathematics and Informatics Science*, *He'nan Polytechnic University*, *Jiaozuo* 454000, *China*)

Abstract: New judging method of non-singular H-matrices was given through appropriately improving some results based on the matrix itself elements. Numerical examples showed that new criterion had greater advantages than the original results.

Key words: nonsingular H-matrix; diagonal dominance; irreducibility dominant matrix; nonzero elements chain

0 引言

H - 矩阵的应用非常广泛,在计算数学和矩阵理论的研究中也很重要,因此判别一个矩阵是否为 H - 矩阵非常重要. 国内外学者对此做了大量探讨和研究,也给出了一些判别方法[1-8],但是目前实用而简便的判定方法仍较为少见. 本文拟从矩阵本身元素出发,对某些论断作适当改进,结合不等式的放缩技巧,得出非奇异 H - 矩阵一组新的判别方法,并将其推广到不可约情形和具非零元素链情形.

1 预备知识

为了简洁叙述,本文约定下列符号:用 $C^{n\times n}$ 表示 n 阶复方阵,设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in \boldsymbol{C}^{n\times n}$,如果 $|a_{ii}|\geqslant R_i(\boldsymbol{A})=\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|$, $i=1,2,\cdots,n$ ($R_i(\boldsymbol{A})$ 简写为 R_i, 一般假定 $R_i\neq 0, i\in N$),则称 $\boldsymbol{A}$ 为(行或)对角占优矩阵. 如果 $|a_{ii}|>R_i(\boldsymbol{A})$, $i=1,2,\cdots,n$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为(行)严格对角占优矩阵[1].

定义 1[2] 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in \boldsymbol{C}^{n\times n}$,若存在正对角矩阵 $\boldsymbol{D}$,使得 $\boldsymbol{AD}$ 为严格对角占优矩阵,则称 $\boldsymbol{A}$ 为广义对角占优矩阵(或称 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异 H - 矩阵).

设 $N=(1,2,\cdots,n)$,且有

$$N_1=\{i\in N:0<|a_{ii}|\leqslant R_i(\boldsymbol{A})\}$$

$$N_2=\{i\in N:|a_{ii}|>R_i(\boldsymbol{A})\}$$

显然有 $N_1\cup N_2=N$. $N_1=\varnothing$ 时,$\boldsymbol{A}$ 显然为非奇异 H - 矩阵;事实上,若 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异 H - 矩阵,则 $\boldsymbol{A}$ 至少有一个严格对角占优行[3],故本文假设 $N_1=\varnothing$, $N_2=\varnothing$. 另外,若 $N_1(N_2)$ 为单点集,规定 $\sum\limits_{j\in N_1,j\neq i}\cdot=$

收稿日期:2013-04-08

基金项目:河南省高等教育教学改革研究省级立项项目(2012SJGLX125)

作者简介:崔润卿(1966—),男,河南省偃师市人,河南理工大学副教授,主要研究方向为矩阵分析.

$0, i \in N_1 (\sum_{j \in N_2, j \neq i} \cdot = 0, i \in N_2)$[3]. 设

$$R_i^* = \sum_{j \in N_2, j \neq i} |a_{ij}| \frac{R_j}{|a_{jj}|} + \sum_{j \in N_1} |a_{ij}| \quad \forall i \in N_2 \qquad ①$$

显然有 $0 < R_i^* \leqslant R_i, \forall i \in N_2$.

定义 2[4] 具非零元素链对角占优矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \boldsymbol{C}^{n \times n}$ 是指 $\boldsymbol{A}$ 满足以下3个条件:

1) $|a_{ii}| \geqslant R_i(\boldsymbol{A}), i = 1,2,\cdots,n$;

2) $K = \{k \in N: |a_{kk} > R_k(\boldsymbol{A})|\} \neq \varnothing$;

3) 对于 $i \in N$,若 $i \notin K$,则必存在如下的非零元素序列 $a_{ii_1}, a_{i_1 i_2}, \cdots, a_{i_s k}$.

定义 3[5] 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \boldsymbol{C}^{n \times n}$ 不可约,如果 $|a_{ii}| \geqslant R_i(\boldsymbol{A}), i = 1,2,\cdots,n$,至少有一个严格不等式成立,则称 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异 H - 矩阵.

引理 1[3] 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \boldsymbol{C}^{n \times n}$,若

$$|a_{ii}| > \sum_{j \in N_1, j \neq i} |a_{ij}| + \sum_{j \in N_2} \frac{|a_{ij}| R_j(\boldsymbol{A})}{|a_{jj}|} \quad \forall i \in N_1$$

则 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异 H - 矩阵.

引理 2[6] 严格对角占优、不可约对角占优都是广义对角占优矩阵.

引理 3[6] 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \boldsymbol{C}^{n \times n}$ 为广义对角占优矩阵,则 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异,且 $\boldsymbol{A}$ 的主对角元素皆非零.

引理 4[7] $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \boldsymbol{C}^{n \times n}$,且具非零元素链的对角占优矩阵,则 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异 H - 矩阵.

2 主要结论

定理 1 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \boldsymbol{C}^{n \times n}$,若

$$|a_{ii}| M > \sum_{j \in N_1, j \neq i} |a_{ij}| M + \sum_{j \in N_2} |a_{ij}| \frac{R_j^*}{|a_{jj}|} \quad \forall i \in N_1 \qquad ②$$

其中 $M = \max_{j \in N_2} \left\{ \frac{R_j}{|a_{jj}|} \right\}$,则 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异 H - 矩阵.

证明 一般情况总假定 $a_{ii} \neq 0, R_i \neq 0, i \in N$. 若 $R_i = 0$,只需考虑 a_{ii} 的余子矩阵.

令

$$G_i = \frac{1}{\sum_{j \in N_1} |a_{ij}|} \left(|a_{ii}| M - \sum_{j \in N_1, j \neq i} |a_{ij}| \cdot M - \sum_{j \in N_2} |a_{ij}| \frac{R_j^*}{|a_{jj}|} \right) > 0 \quad i \in N_1 \qquad ③$$

$$g_i = \frac{1}{\sum_{j \in N_1} |a_{ij}|} \left(R_i^* - \sum_{j \in N_1} |a_{ij}| M - \sum_{j \in N_2, j \neq i} |a_{ij}| \frac{R_j^*}{|a_{jj}|} \right) > 0 \quad i \in N_2 \qquad ④$$

由①②可得,$0 < g_i, 0 < G_i$,并且一定存在充分小的 $\varepsilon > 0$ 满足

$$0 < \varepsilon < \min_{i \in N} \{g_i, G_i\} \qquad ⑤$$

构造正对角矩阵 $\boldsymbol{D} = diag(d_1, d_2, \cdots, d_n)$,其中

$$d_i = \begin{cases} M + \varepsilon & i \in N_1 \\ R_j^* / |a_{jj}| & i \in N_2 \end{cases}$$

设 $\boldsymbol{B} = (b_{ij}) = \boldsymbol{AD}$,则 $b_{ij} = a_{ij} \cdot d_j, i,j \in N$,下面只需证明 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{AD}$ 是严格对角占优矩阵即可.

$\forall i \in N_1, |b_{ii}| = |a_{ii}| (M + \varepsilon)$,有

$$\sum_{j \in N_1, j \neq i} |b_{ij}| = \sum_{j \in N_1, j \neq i} |a_{ij}| (M + \varepsilon) + \sum_{j \in N_2} |a_{ij}| \frac{R_j^*}{|a_{jj}|} = \sum_{j \in N_1, j \neq i} |a_{ij}| M + \sum_{j \in N_1, j \neq i} |a_{ij}| \varepsilon + \sum_{j \in N_2} |a_{ij}| \frac{R_j^*}{|a_{jj}|}$$

由③⑤可知,上式可变为

$$\sum_{j \in N_1, j \neq i} |b_{ij}| < \sum_{j \in N_1, j \neq i} |a_{ij}| M + \sum_{j \in N_1, j \neq i} |a_{ij}| \varepsilon + |a_{ii}| \varepsilon + \sum_{j \in N_2} |a_{ij}| \frac{R_j^*}{|a_{jj}|}$$

$$\sum_{j \in N_1, j \neq i} |b_{ij}| < \sum_{j \in N_1, j \neq i} |a_{ij}| M + \sum_{j \in N_1} |a_{ij}| \frac{1}{\sum_{j \in N_1} |a_{ij}|} \left(|a_{ii}| M - \sum_{j \in N_1, j \neq i} |a_{ij}| M - \sum_{j \in N_2} |a_{ij}| \frac{R_j^*}{|a_{jj}|} \right) + \sum_{j \in N_2} |a_{ij}| \frac{R_j^*}{|a_{jj}|} < |a_{ii}| M + |a_{ii}| \varepsilon = |b_{ii}|$$

$$\forall i \in N_2, |b_{ii}| = |a_{ii}| \frac{R_i^*}{|a_{ii}|} = R_i^*$$

$$\sum_{j \in N_2, j \neq i} |b_{ij}| = \sum_{j \in N_1} |a_{ij}| (M + \varepsilon) + \sum_{j \in N_2, j \neq i} |a_{ij}| \frac{R_j^*}{|a_{jj}|}$$

当 $\sum_{j \in N_1} |a_{ij}| = 0$,即 $a_{ij} = 0, \forall i \in N_2$ 时,

$$R_i(\boldsymbol{B}) = \sum_{j \in N_2, j \neq i} |b_{ij}| = \sum_{j \in N_2, j \neq i} |a_{ij}| \frac{R_j^*}{|a_{jj}|} < \sum_{j \in N_2, j \neq i} |a_{ij}| \frac{R_j}{|a_{jj}|} = R_i^*$$

当 $\sum_{j \in N_1} |a_{ij}| \neq 0$,即 $a_{ij} \neq 0, \forall i \in N_2$ 时,

$$R_i(\boldsymbol{B}) = \sum_{j \in N_2, j \neq i} |b_{ij}| = \sum_{j \in N_1} |a_{ij}| (M + \varepsilon) +$$

$$\sum_{j\in N_2,j\neq i}|a_{ij}|\frac{R_j^*}{|a_{jj}|}$$

由 ④⑤ 可得

$$R_i(\boldsymbol{B}) < \sum_{j\in N_1}|a_{ij}|M+\sum_{j\in N_1}|a_{ij}|g_i+$$

$$\sum_{j\in N_2,j\neq i}|a_{ij}|\frac{R_j^*}{|a_{jj}|}=R_i^*=|b_{ii}|$$

可见 $\forall i\in N$, $|b_{ii}|>R_i(\boldsymbol{B})$ 即 $\boldsymbol{B}$ 是严格对角占优矩阵,因而 $\boldsymbol{A}$ 是广义对角占优矩阵,即为非奇异 $H-$矩阵. 证毕.

定理 2 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in \boldsymbol{C}^{n\times n}$ 不可约,若

$$|a_{ii}|^2\geqslant R_i(\boldsymbol{A})\boldsymbol{Q}(\sum_{j\in N_1,j\neq i}|a_{ij}|+\sum_{j\in N_2}|a_{ij}|)$$

$$\forall i\in N_1 \tag{6}$$

且至少有一个严格不等式成立,其中

$$\boldsymbol{Q}=\max_{i\in N_1,j\in N_2}\left\{\frac{|a_{ii}|}{R_i(\boldsymbol{A})},\frac{R_j^*}{|a_{jj}|}\right\}$$

则 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异 $H-$矩阵.

证明 构造正对角矩阵 $\boldsymbol{D}=diag(d_1,d_2,\cdots,d_n)$,其中 $d_i=\begin{cases}\dfrac{|a_{ii}|}{R_i(\boldsymbol{A})} & i\in N_1\\ R_j^*/|a_{jj}| & i\in N_2\end{cases}$.

显然 $\boldsymbol{D}$ 为正对角矩阵,设 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})=\boldsymbol{AD}$,则 $b_{ij}=a_{ij}\cdot d_j$, $i,j\in N$. 下面只需证明 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AD}$ 是严格对角占优矩阵即可.

$\forall i\in N_1$ 时,有

$$|b_{ii}|-R_i(\boldsymbol{B})=|a_{ii}|\frac{|a_{ii}|}{R_i(\boldsymbol{A})}-$$

$$\sum_{j\in N_1,j\neq i}|a_{ij}|\frac{|a_{jj}|}{R_j(\boldsymbol{A})}-\sum_{j\in N_2}|a_{ij}|\frac{R_j^*}{|a_{jj}|}$$

当 $\sum_{j\in N_2}|a_{ij}|\neq 0$ 时,由 ⑥ 可知

$$|b_{ii}|-R_i(\boldsymbol{B})\geqslant|a_{ii}|\frac{|a_{ii}|}{R_i(\boldsymbol{A})}-$$

$$\boldsymbol{Q}(\sum_{j\in N_1,j\neq i}|a_{ij}|+\sum_{j\in N_2}|a_{ij}|)\geqslant 0$$

当 $\sum_{j\in N_2}|a_{ij}|=0$ 时,由 ⑥ 可知

$$|b_{ii}|-R_i(\boldsymbol{B})=|a_{ii}|\frac{|a_{ii}|}{R_i(\boldsymbol{A})}-$$

$$\sum_{j\in N_1,j\neq i}|a_{ij}|\frac{|a_{jj}|}{R_j(\boldsymbol{A})}\geqslant|a_{ii}|\frac{|a_{ii}|}{R_i(\boldsymbol{A})}-$$

$$\boldsymbol{Q}\sum_{j\in N_1,j\neq i}|a_{ij}|\geqslant 0 \tag{7}$$

$\forall i\in N_2$ 时,有

$$|b_{ii}|-R_i(\boldsymbol{B})=R_i^*-\sum_{j\in N_1}|a_{ij}|\frac{|a_{jj}|}{R_j(\boldsymbol{A})}-$$

$$\sum_{j\in N_2,j\neq i}|a_{ij}|\frac{R_j^*}{|a_{jj}|}$$

由 ① 可知

$$|b_{ii}|-R_i(\boldsymbol{B})=\sum_{j\in N_2,j\neq i}|a_{ij}|\frac{R_j}{|a_{jj}|}+\sum_{j\in N_1}|a_{ij}|-$$

$$\sum_{j\in N_1}|a_{ij}|\frac{|a_{jj}|}{R_j(\boldsymbol{A})}-\sum_{j\in N_2,j\neq i}|a_{ij}|\frac{R_j^*}{|a_{jj}|}\geqslant 0$$

综上所述, $\forall i\in N$, $|b_{ii}|\geqslant R_i(\boldsymbol{B})$. 且 ⑦ 中至少有一个严格不等号成立,又因 $\boldsymbol{A}$ 不可约,保证了 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AD}$ 不可约,从而 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AD}$ 是不可约对角占优矩阵,所以 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异 $H-$矩阵.

定理 3 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in \boldsymbol{C}^{n\times n}$,若有

$$|a_{ii}|^2\geqslant R_i(\boldsymbol{A})\boldsymbol{Q}(\sum_{j\in N_1,j\neq i}|a_{ij}|+\sum_{j\in N_2}|a_{ij}|)$$

$$\forall i\in N_1$$

成立,且至少有一个严格不等号成立,对于每一不等式成立的 i 存在非零元素链 $a_{ij_1}\cdot a_{j_1j_2}\cdots a_{j_{k-1}j_k}\neq 0$ 满足 $|a_{kk}|^2\geqslant R_k(\boldsymbol{A})\boldsymbol{Q}(\sum_{j\in N_1,j\neq i}|a_{kj}|+\sum_{j\in N_2}|a_{kj}|)$, $\forall i\in N_1$,则 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异 $H-$矩阵.

证明 构造正对角矩阵 $\boldsymbol{D}=diag(d_1,d_2,\cdots,d_n)$,其中 $d_i=\begin{cases}\dfrac{|a_{ii}|}{R_i(\boldsymbol{A})} & i\in N_1\\ R_j^*/|a_{jj}| & i\in N_2\end{cases}$.

显然 $\boldsymbol{D}$ 为正对角矩阵,设 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})=\boldsymbol{AD}$, $b_{ij}=a_{ij}\cdot d_j$, $i,j\in N$, $\boldsymbol{AD}$ 不改变 $\boldsymbol{A}$ 的非零元素链性质,由定理 2 的证明过程可以看出, $\boldsymbol{B}$ 为具非零元素链对角占优矩阵,由引理 3 可知,则 $\boldsymbol{B}$ 为非奇异 $H-$矩阵. 因而存在正对角矩阵 $\boldsymbol{D}_1$,使得 $\boldsymbol{BD}_1=\boldsymbol{ADD}_1$ 为严格对角占优矩阵. 而 $\boldsymbol{DD}_1$ 显然为正对角矩阵,故 $\boldsymbol{A}$ 也为非奇异 $H-$矩阵.

3 数值例子

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0.9&0.1&0.2&0.1\\0.9&0.9&0.7&0.8\\0.1&0.1&0.9&0.1\\0.3&0.1&0.2&\dfrac{6}{9}\end{pmatrix}$,从而有

$$N_1=\{2\}\qquad N_2=\{1,3,4\}$$

$$|a_{11}|=0.9\qquad R_1=0.4\qquad \frac{R_1}{|a_{11}|}=\frac{4}{9}$$

$$R_1^*\approx 0.257\qquad \frac{R_1^*}{|a_{11}|}\approx 0.289$$

$$|a_{22}|=0.9\qquad R_2=2.4$$

$$|a_{33}| = 0.9 \qquad R_1 = 0.3 \qquad \frac{R_3}{|a_{33}|} = \frac{1}{3}$$

$$R_1^* \approx 0.234 \qquad \frac{R_3^*}{|a_{33}|} = 0.26$$

$$|a_{44}| = \frac{6}{9} \qquad R_4 = 0.6 \qquad \frac{R_4}{|a_{44}|} = 0.9$$

$$R_1^* \approx 0.300 \qquad \frac{R_4^*}{|a_{44}|} = 0.45$$

构造正对角矩阵

$$\boldsymbol{D} = diag(d_1, d_2, \cdots, d_n) = (0.289, 0.9 + \varepsilon, 0.26, 0.45)$$

取 $\frac{1}{10^3} = \varepsilon < \min_{i \in N}\{g_1 = 0.7, g_3 = 0.701, g_4 = 0.713, G_2 = 0.0108\}$,当 $i = 2$ 时,有

$$|a_{22}| M = 0.9 \times 0.9 = 0.81 > \sum_{j \in N_1, j \neq 2} |a_{2j}| M + \sum_{j \in N_2} |a_{2j}| \frac{R_j^*}{|a_{jj}|} = 0.257 + 0.182 + 0.36 = 0.799$$

即 $\boldsymbol{A}$ 满足本文定理1的条件,$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{AD}$ 是严格对角占优矩阵,即 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异 H - 矩阵.

但是,$i = 2$ 时, 应用引理1可得

$$|a_{22}| = 0.9 < \sum_{j \in N_1, j \neq 2} |a_{2j}| + \sum_{j \in N_2} |a_{2j}| \frac{R_j(\boldsymbol{A})}{|a_{jj}|} = 0.9 \times \frac{4}{9} + 0.7 \times \frac{1}{3} + 0.8 \times 0.9 \approx 1.353$$

引理1失效,所以本文定理1比引理1的适用性更为广泛.

4　结论

从本文证明过程不难看出,定理1和引理1互不包含,定理1允许非严格对角占优可达 $n-1$ 行,而且可以程序化,这就为矩阵的非奇异性的判定开辟了一条新的路径,也有助于 M - 矩阵的相关研究.在此基础上,将其推广到不可约情形和具非零元素链情形,也具有十分重要的实际意义.

参考文献:

[**1**] 陈公宁. 矩阵理论与应用[M]. 北京:科学出版社,2007:225-227.

[**2**] 范迎松,陆全,徐仲. 非奇异 H - 矩阵的一组判定条件[J]. 高校应用数学学报,2011,26(4):474.

[**3**] 黄廷祝. 非奇异 H - 矩阵的简捷判据[J]. 计算数学,1993(3):318.

[**4**] 程云鹏,张凯院,徐仲. 矩阵论[M]. 西安:西北工业大学出版社,2002:377-378.

[**5**] Varge R S. On recurring throrems on diagonal dominance[J]. Linear Algebra Appl,1976(13):1.

[**6**] 谢冬秀,雷纪纲,陈桂芝. 矩阵理论及方法[M]. 北京:科学出版社,2012:233-235.

[**7**] 胡家赣. 线性方程组的迭代解法[M]. 北京:科学出版社,1991:134-135.

[**8**] 田素霞. 广义严格对角占优的判定方法[J]. 郑州轻工业学院学报:自然科学版,2011,26(1):106.