

# 离散时滞异结构混沌系统的广义投影同步

毛北行, 李亮

(郑州航空工业管理学院 数理系, 河南 郑州 450015)

**摘要:** 针对离散时滞异结构混沌系统广义投影同步问题, 基于 Lyapunov 稳定性理论, 得到了在选取适当控制律的情况下, 离散时滞异结构系统是投影同步的结论, 并通过数值算例证明了该方法的有效性.

**关键词:** 广义投影同步; 离散时滞异结构; 混沌系统; Lyapunov 稳定性理论

**中图分类号:** O545 **文献标志码:** A **DOI:** 10.3969/j.issn.2095-476X.2013.06.024

## Generalized projective synchronization of discrete time-delayed different structure chaotic systems

MAO Bei-xing, LI Liang

(Department of Mathematics and Physics, Zhengzhou Institute of Aeronautical Industry Management, Zhengzhou 450015, China)

**Abstract:** Aiming at the problem of generalized projective synchronization of discrete time-delayed different structure chaotic systems, based on Lyapunov stability theory, the conclusion was obtained that discrete time-delayed different structure chaotic systems were projective synchronization under the case selection of appropriate control law. Numerical simulation examples of chaotic system verified the effectiveness of the proposed method.

**Key words:** generalized projective synchronization; discrete time-delayed different structure; chaotic systems; Lyapunov stability theory

## 0 引言

自 Pecora 和 Carroll 于 1990 年代提出混沌系统完全同步的方法以来, 混沌同步研究取得了巨大的进展, 例如: 完全同步、相同步、耦合同步、滞后同步、广义同步、投影同步等<sup>[1-6]</sup>. 1999 年, R. Mainieri 等<sup>[7]</sup>通过对耦合部分线性系统的研究指出, 耦合的主从系统状态下的输出不仅相位是锁定的, 而且各对应状态的振幅还按某一比例关系演化, 这类混沌

同步现象称为投影同步.

另一方面, 虽然人们对混沌系统做了大量研究, 但大多数工作仅考虑了相同结构的混沌同步, 异结构混沌系统的同步还没有被引起足够的关注. 混沌系统敏感地依赖初值条件, 对于异结构混沌系统, 初值条件任何微小的变化都可能引起系统之间动态行为的巨大差异. 所以, 对异结构混沌系统的研究具有更强的实用性. 文献 [8-9] 研究了异结构混沌系统的广义投影同步问题, 但其结果都基于对

收稿日期: 2013-10-23

基金项目: 国家自然科学基金项目(51072184); 国家自然科学基金数学天元基金项目(11226337); 郑州航空工业管理学院青年基金项目(2012113004)

作者简介: 毛北行(1976—), 男, 河南省洛阳市人, 郑州航空工业管理学院副教授, 硕士, 主要研究方向为切换系统与混沌同步.

连续时间系统的讨论,离散时间系统的异结构混沌系统的同步研究报道目前还比较少见.鉴于此,本文拟针对离散时滞异结构混沌系统广义投影同步问题,基于 Lyapunov 稳定性理论,给出控制律的设计方案,并用数值例子表明该方案的有效性.

## 1 离散异结构混沌系统的投影同步

考虑如下离散混沌系统:

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k)) \\ y(k+1) = g(y(k)) + u(k) \end{cases}$$

其中  $x(k)$   $y(k)$  分别代表主、从系统;  $u(k)$  为待设计的控制器. 如果存在一个常数  $\alpha$  ( $\alpha \neq 0$ ), 且满足  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(k) - \alpha y(k)\| = 0$ , 则称系统达到了广义投影同步.  $\alpha$  为比例因子.

假定驱动系统为

$$\begin{aligned} x(k+1) &= f(x(k)) = \\ Ax(k) + [f(x(k)) - Ax(k)] &= \\ Ax(k) + h(x(k)) \end{aligned} \quad (1)$$

设计响应系统如下:

$$\begin{aligned} y(k+1) &= g(y(k)) = \\ By(k) + [g(y(k)) - By(k)] + u(k) &= \\ By(k) + s(y(k)) + u(k) \end{aligned} \quad (2)$$

定理1 若满足  $\lambda_{\max} [(A-K)^T(A-K)] < 1$ , 在控制器

$$u(k) = \alpha^{-1}h(x(k)) + (\alpha^{-1}A\alpha - B)y(k) + \alpha^{-1}K(x(k) - \alpha y(k)) - s(y(k)) \quad (3)$$

的作用下,系统(1)与(2)是广义投影同步的.

证明 定义误差  $e(k) = x(k) - \alpha y(k)$ , 设计控制器为(3), 则

$$\begin{aligned} e(k+1) &= x(k+1) - \alpha y(k+1) = \\ Ax(k) + h(x(k)) - \alpha(By(k)) + s(y(k)) + \\ u(k) &= Ax(k) + h(x(k)) - \alpha(By(k)) - \\ \alpha s(y(k)) - h(x(k)) - A\alpha y(k) - K(x(k) - \\ \alpha y(k)) + \alpha By(k) + \alpha s(y(k)) &= (A-K)e(k) \end{aligned}$$

构造 Lyapunov 函数  $V(k) = e^T(k)e(k)$ , 则其一阶差分为

$$\begin{aligned} \Delta V(k) &= V(k+1) - V(k) = \\ e^T(k+1)e(k+1) - e^T(k)e(k) &= \\ e^T(k) [(A-K)^T(A-K) - I]e(k) &\leq \\ \{\lambda_{\max} [(A-K)^T(A-K) - I]\} e^T(k)e(k) \end{aligned}$$

选取适当的  $K$  值, 总可以使矩阵的最大特征值  $\lambda_{\max} [(A-K)^T(A-K)] < 1$ , 从而  $\Delta V(k) < 0$ , 故

系统是广义投影同步的.

## 2 离散时滞异结构混沌系统的投影同步

考虑如下离散时滞混沌系统

$$\begin{cases} x(n+1) = f(x(n-m)) \\ y(n+1) = g(y(n-m)) + u(n) \end{cases}$$

假定驱动系统为

$$\begin{aligned} x(n+1) &= f(x(n-m)) = \\ Ax(n-m) + h(x(n-m)) \end{aligned} \quad (4)$$

设计响应系统如下:

$$\begin{aligned} y(n+1) &= g(y(n-m)) = \\ By(n-m) + s(y(n-m)) + u(n) \end{aligned} \quad (5)$$

定理2 若满足  $\lambda_{\max} [(A-K)^T(A-K)] < 1$ , 在控制器

$$\begin{aligned} u(k) &= \alpha^{-1}h(x(n-m)) + (\alpha^{-1}A\alpha - B) \cdot \\ y(n-m) + \alpha^{-1}K(x(n-m) - \\ \alpha y(n-m)) - s(y(n-m)) \end{aligned} \quad (6)$$

的作用下,系统(3)与(4)是广义投影同步的.

证明 定义误差  $e(n) = x(n) - \alpha y(n)$ , 设计控制器为(6), 则

$$\begin{aligned} e(n+1) &= x(n+1) - \alpha y(n+1) = \\ Ax(n-m) + h(x(n-m)) - \alpha(By(n-m)) + \\ s(y(n-m)) + u(n) &= Ax(n-m) + \\ h(x(n-m)) - \alpha(By(n-m)) - \alpha s(y(n-m)) - \\ h(x(n-m)) - A\alpha y(n-m) - K(x(n-m) - \\ \alpha y(n-m)) + \alpha By(n-m) + \alpha s(y(n-m)) &= \\ (A-K)e(n-m) \end{aligned} \quad (7)$$

构造 Lyapunov 函数

$$V(n) = e^T(n)e(n) + \sum_{i=1}^m e^T(n-i)e(n-i)$$

则其一阶差分为

$$\begin{aligned} \Delta V(n) &= V(n+1) - V(n) = \\ [e^T(n+1)e(n+1) - e^T(n)e(n)] + \\ [-e^T(n-m)e(n-m) + e^T(n)e(n)] &= \\ e^T(n+1)e(n+1) - e^T(n-m)e(n-m) \end{aligned}$$

将(7)代入上式可得

$$\begin{aligned} e^T(n-m) [(A-K)^T(A-K) - I]e(n-m) &\leq \\ \{\lambda_{\max} [(A-K)^T(A-K) - I]\} e^T(n-m)e(n-m) \end{aligned}$$

选取适当的  $K$  值, 总可以使矩阵的最大特征值  $\lambda_{\max} [(A-K)^T(A-K)] < 1$ , 从而  $\Delta V(k) < 0$ , 故系统是广义投影同步的.

### 3 数值算例

笔者以 Chen 系统和 Liu 系统为例 通过数值算例验证本文方法的有效性.

设 Chen 系统为驱动系统

$$x = [x_1(k) \ x_2(k) \ x_3(k)]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} -35 & 35 & 0 \\ -7 & 28 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$h(x(k)) = [0, -x_1x_3, x_1x_2]^T$$

设 Liu 系统为响应系统

$$y = [y_1(k) \ y_2(k) \ y_3(k)]^T$$

$$s(y(k)) = [0, -y_1y_3, y_1^2]^T$$

$$B = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 40 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2.5 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 1.193 & 10.578 & -0.437 \\ 1.193 & 10.578 & -0.437 \\ 1.193 & 10.578 & -0.437 \end{bmatrix}$$

不妨取比例因子  $\alpha = 0.5$ , 系统的初始值分别设定为

$$[x_1(0) \ x_2(0) \ x_3(0)] = [0.23 \ 0.23 \ 0.23]$$

$$[y_1(0) \ y_2(0) \ y_3(0)] = [35 \ 7.41 \ 13.9]$$

系统误差定义为  $e_i = x_i - y_i (i = 1 \ 2 \ 3)$ , 则在选取控制律 ⑧\* 的作用下, 算例中 Chen 系统和 Liu 系统是混沌同步的, 其系统误差曲线如图 1 所示. 由图 1 可知 3 条曲线在  $t = 5.75$  s 后实现了同步.

### 4 结论

本文研究了离散异结构混沌系统的广义投影同步问题以及离散时滞异结构混沌系统广义投影同步问题, 给出了控制律的设计方案, 最终得到选取适当的可调参数  $K$ , 即可实现驱动系统与响应系统投影同步这一结论.

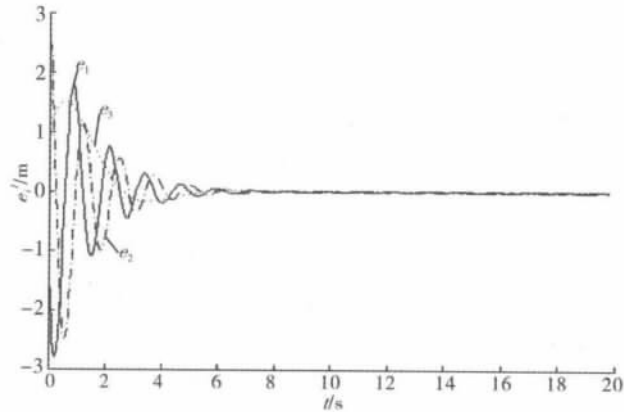


图 1 驱动响应系统误差曲线

#### 参考文献:

- [1] 涂俐兰, 柯超, 丁咏梅. 随机扰动下一般混沌系统的  $H_\infty$  同步 [J]. 物理学报, 2011, 60(5): 8031.
- [2] 李秀春, 谷建华, 王云岚, 等. 一类带有未知参数的受扰混沌系统的观测器同步 [J]. 物理学报, 2011, 60(5): 5051.
- [3] 杨东升, 张化光, 李爱平, 等. 基于模糊模型的不同结构的混沌系统同步 [J]. 物理学报, 2007, 56(6): 1335.
- [4] 毛北行, 孟晓玲. 一类离散复杂网络混沌系统的输出耦合滑膜同步控制 [J]. 郑州轻工业学院学报: 自然科学版, 2013, 28(2): 103.
- [5] 李建芬, 李农. 一类混沌系统的修正函数投影同步 [J]. 物理学报, 2011, 60(8): 5071.
- [6] 毛北行, 程春蕊, 卜春霞. Lurie 混沌系统的修正函数投影同步 [J]. 数学杂志, 2013, 33(4): 717.
- [7] Mainieri R, Rehacek J. Projective synchronization in three-dimensional chaotic systems [J]. Physical Review Letters, 1999, 82(15): 3042.
- [8] 王宇野, 许红珍. 异结构不确定混沌系统的广义投影同步 [J]. 系统工程与电子技术, 2010, 32(2): 355.
- [9] 曾强洪, 朱石坚, 楼京俊, 等. 异结构混沌系统的广义投影同步研究 [J]. 武汉理工大学学报, 2009, 31(15): 102.

\* 控制律 ⑧:

$$u(k) = \begin{bmatrix} 0.597x_1 - 6.55y_1 + 5.29x_2 + 3.6y_2 - 0.22x_3 + 0.11y_3 \\ -0.5x_1x_2 - y_1y_3 + 0.597x_1 + 11.45y_1 + 5.29x_2 + 4.35y_2 - 0.22x_3 + 0.11y_3 \\ 0.5x_1x_2 + y_1y_2 + 0.597x_1 - 0.3y_1 + 5.29x_2 - 2.65y_2 - 0.22x_3 + 0.11y_3 \end{bmatrix}$$