

手足口病传播的数学模型与数值模拟

李春

(郑州轻工业学院 数学与信息科学学院, 河南 郑州 450002)

摘要: 根据手足口病的传播特征, 建立了该疾病传播的连续数学模型, 并对其进行了稳定性分析, 得到了疾病消亡或持续的条件. 根据所获得的数据, 对模型进行了数值模拟, 证明了该模型的正确性.

关键词: 手足口病传播模型; 平衡点; 阈值; 数值模拟

中图分类号: O242.1; R18 **文献标志码:** A **DOI:** 10.3969/j.issn.2095-476X.2013.06.025

Mathematical model and numerical simulation of hand foot and mouth disease spread

LI Chun

(College of Mathematics and Information Science, Zhengzhou University of Light Industry, Zhengzhou 450002, China)

Abstract: According to the propagation characteristics of hand foot and mouth disease, a continuous mathematical model of the spread of the disease was established. Its stability was also analyzed, and the control or continuous condition of the disease were obtained. Based on the obtained data, the numerical simulation was carried out according to the model. It illustrated the correctness of propagation model of the disease.

Key words: hand foot and mouth disease spread model; equilibrium point; threshold; numerical simulation

0 引言

手足口病是一种常见的传染性疾病,至今尚无疫苗可有效防治.经过多年的观察与研究,其传播特征已被掌握^[1].该疾病主要传染群体一般为年龄低于5岁的婴幼儿人群,对于年龄超过5岁的人群,即使接触传染源,得病的几率也很低.手足口病是具有潜伏期的一种传染病,具有潜伏期的传染病模型是一种常见的数学模型,借助轨道稳定和复合矩阵可以研究该类传染病动力学模型解的稳定性问题.文献[2]研究了具有常数输入的SEIR模型,并研究了该模型的稳定性,对指数输入的模型没有研究.文献[3]研究了具有指数输入的且具有饱和接触率的SEIR模型及模型的稳定性,具有标准发生

率的模型还需进一步研究.鉴于此,本文拟建立手足口病传播的数学模型,研究模型的稳定性,通过实际数据进行数据分析,验证该模型的正确性.

1 数学模型的建立

本文做如下假设.

1) 将人群分为 S, E, I, R 共4类,其中 $S(t)$ 表示 t 时刻易感者人群数量, $E(t)$ 表示 t 时刻处于潜伏期的人群数量, $I(t)$ 表示 t 时刻已经感染并发病的人群数量, $R(t)$ 表示 t 时刻康复者人群数量.一些易感者由于年龄增长不会再感染手足口病而直接进入康复者类,曾经感染过该病的患者一经治愈便不再感染此病而进入康复者类,新生儿全部进入易感者类.模型基本框架如图1所示.

收稿日期: 2013-10-27

基金项目: 河南省科技计划项目(112300410156); 郑州轻工业学院校内基金项目(2011XJJ014)

作者简介: 李春(1979—),男,河南省鹤壁市人,郑州轻工业学院讲师,主要研究方向为微分方程.

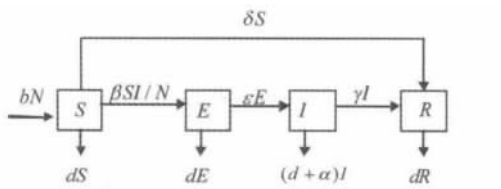


图1 SEIR 模型基本框架

2) 采用标准发生率 $\beta SI/N$.

3) 采用指数输入率 bN .

4) 参数说明: b 为出生率系数, d 为死亡率系数, α 为因病死亡率系数, 其数学模型为^[4]

$$\begin{cases} S' = bN - dS - \beta SI/N - \delta S \\ E' = \beta SI/N - \varepsilon E - dE \\ I' = \varepsilon E - (\gamma + \alpha + d)I \\ R' = \gamma I + \delta S - dR \end{cases} \quad (1)$$

其中 $N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + R(t)$, 则 $N' = (b - d)N - \alpha I$.

由于 (1) 中前 3 个方程不含有 R , 故可考虑其等价模型

$$\begin{cases} S' = bN - dS - \beta SI/N - \delta S \\ E' = \beta SI/N - \varepsilon E - dE \\ I' = \varepsilon E - (\gamma + \alpha + d)I \end{cases} \quad (2)$$

将 (2) 进行归一化处理, 令 $s = S/N, e = E/N, i = I/N$, 可得其等价模型

$$\begin{cases} s' = b - (b + \delta)s - \beta se + \alpha si \\ e' = \beta si - (b + \varepsilon)e + \alpha ei \\ i' = \varepsilon e - (\gamma + \alpha + b)i + \alpha i^2 \end{cases} \quad (3)$$

其中 $0 \leq s + e + i \leq 1$, 易证 (3) 的正向不变集 $D = \{(s, e, i) \mid 0 \leq s + e + i \leq 1\}$. 这里 $s(t), e(t), i(t)$ 分别表示易感者比例、处于潜伏期的人群比例、已感染该疾病并已经发病者比例.

2 平衡点及其稳定性分析

定义 $R_0 = \frac{\beta b \varepsilon}{(\varepsilon + b)(\delta + b)(\gamma + \alpha + b)}$.

定理 1 当 P_0 是全局渐进稳定的, 系统 (3) 总存在无病平衡点 $P_0(\frac{b}{\delta + b}, 0, 0)$, 且 $R_0 < 1$ ^[4].

定理 2 当 $R_0 > 1$ 时, 系统 (3) 存在惟一正平衡点 P^* , 且 P^* 在 D 内全局渐进稳定^[4].

由定义及定理 1 和定理 2 可知 $R_0 = 1$ 是区别疾病消亡和持续的阈值, 当 $R_0 < 1$, 疾病将消亡; 而当

$R_0 > 1$, 则疾病将持续.

3 数值模拟与分析

由于日前国家卫生部官网还没有关于手足口病的详细数据, 故笔者对安徽省卫生厅的官方网站公布的 2008 年 5 月 4 日—5 月 11 日每日感染和治愈的数据进行参数分析与估计^[5], 并依此进行数据分析和数值模拟. 详细数据见表 1.

表 1 2008 年 5 月 4—11 日安徽省手足口病病情发展统计表

日期	总病例数/例	治愈人数/人	日病人数/人	日治愈数/人	日治愈率	死亡人数/人
5 月 4 日	584 0	364 2	319 8	—	—	22
5 月 5 日	654 5	316 6	337 9	524	0.163 8	22
5 月 6 日	728 3	378 0	350 3	614	0.187 8	22
5 月 7 日	798 8	432 8	360 6	602	0.171 8	24
5 月 8 日	872 9	492 7	380 2	545	0.151 1	24
5 月 9 日	930 4	553 6	376 8	609	0.160 2	24
5 月 10 日	982 4	617 5	364 9	639	0.169 6	24
5 月 11 日	102 65	688 5	338 0	710	0.196 4	24

由于手足口病多发于 5 岁以下儿童, 潜伏期一般为 3 ~ 5 d, 一般 7 ~ 10 d 可以治愈, 所以为计算方便, 笔者假设潜伏期为 4 d, 8.5 d 可以治愈, 由此得到平均患病周期 $\frac{1}{\gamma} = 8.5$, 即 $\gamma = 0.117$, 平均潜伏期 $\frac{1}{\varepsilon} = 4$, 即 $\varepsilon = 0.25$. 由表 1 计算出因病死亡率

$\alpha = 0.003$, 根据文献 [6] 可以计算出接触率 $\beta = 1.7$. 笔者根据安徽省统计局^[7] 的数据计算得 2008 年安徽省新生儿出生率 $b = 0.013$, 自然免疫率参数 $\delta = 0.1$, 进而可计算出 $s(t), e(t)$ 以及 $i(t)$ 的初始值分别为 $s(0) = 0.87, e(0) = 0.000 032, i(0) = 0.000 085$; 阈值 $R_0 = 1.4 > 1$. 根据定理 1 和定理 2, 模型 (3) 的解应该趋于正平衡解, 即地方病平衡点. 利用 DEDiscover 软件可计算得到模型 (3) 的数值解, 计算时设计步长为 0.1 d, 时间 $t = 0 \sim 500$ d, 部分数据计算结果见表 2.

模拟该系统中 $s(t), e(t), i(t)$ 的变化趋势, 如图 2—图 4 所示, 可见图形的变化趋势与理论的结论一致, 即 $R_0 > 1$ 疾病将持续.

表 2 数值模拟部分结果

t/d	$e(t)$	$i(t)$	$s(t)$
0.000 0	$8.500 0 \times 10^{-5}$	$3.200 0 \times 10^{-5}$	0.870 0
0.100 0	$8.756 7 \times 10^{-5}$	$3.372 0 \times 10^{-5}$	0.861 5
0.200 0	$9.027 1 \times 10^{-5}$	$3.548 2 \times 10^{-5}$	0.853 1
0.300 0	$9.311 1 \times 10^{-5}$	$3.729 1 \times 10^{-5}$	0.844 8
0.400 0	$9.608 5 \times 10^{-5}$	$3.914 7 \times 10^{-5}$	0.836 6
499.600 0	0.014 1	0.026 6	0.082 2
499.700 0	0.014 1	0.026 6	0.082 2
499.800 0	0.014 1	0.026 6	0.082 2
499.900 0	0.014 1	0.026 6	0.082 2
500.000 0	0.014 1	0.026 6	0.082 2

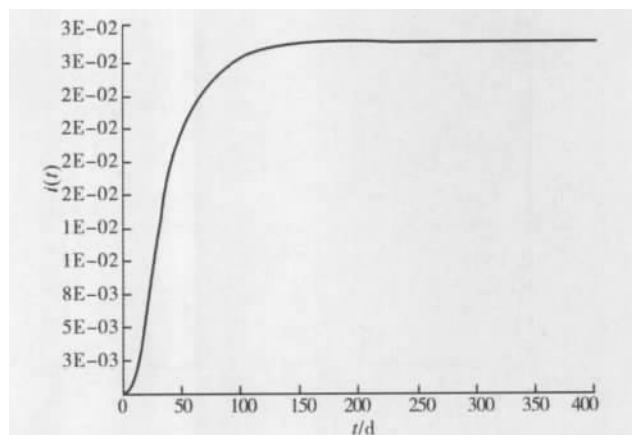


图 4 $R_0 > 1$ 时函数 $i(t)$ 的变化趋势

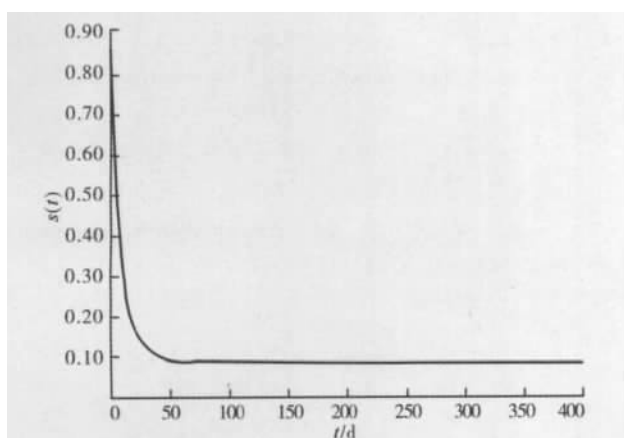


图 2 $R_0 > 1$ 时函数 $s(t)$ 的变化趋势

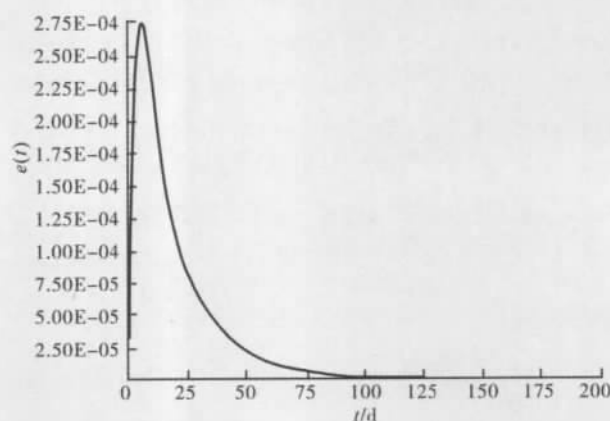


图 5 $R_0 < 1$ 时函数 $e(t)$ 的变化趋势

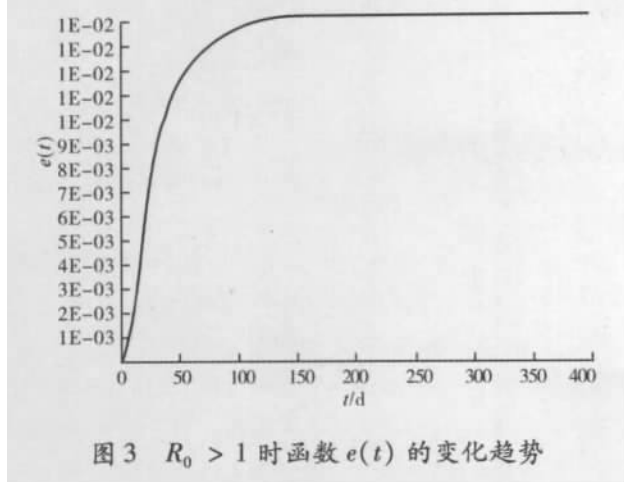


图 3 $R_0 > 1$ 时函数 $e(t)$ 的变化趋势

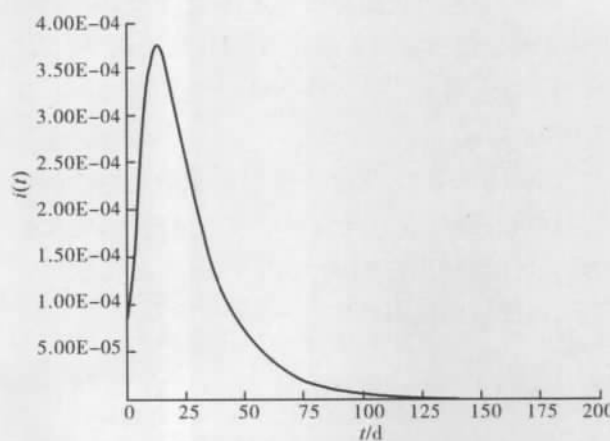


图 6 $R_0 < 1$ 时函数 $i(t)$ 的变化趋势

而当改变参数值使得 $R_0 < 1$ 时,系统③应趋近于无病平衡点,如取 $b = 0.013$ $\delta = 0.3$ $\alpha = 0.003$, $\gamma = 0.117$ $\varepsilon = 0.25$ $\beta = 1.7$, 计算得 $R_0 = 0.504 < 1$, 利用 DEDiscover 软件得到函数 $e(t)$ $i(t)$ $s(t)$ 的曲线如图 5—7 所示, 图像进一步验证了定理 1 的理论结果.

4 结论

本文对已有的理论结果进行了数值模拟,通过对实际数据的分析得到参数值,进而得到了各个函数的图像,从图像的结果中可以看出理论结论与实

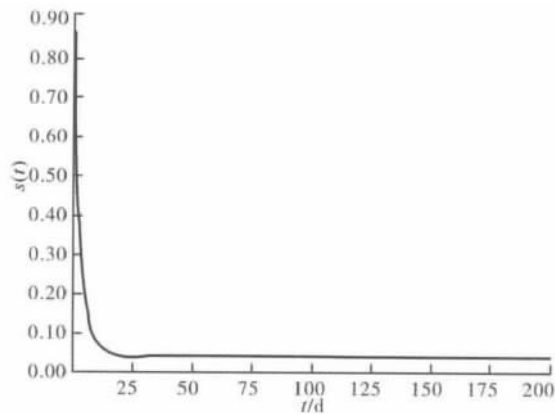


图7 $R_0 < 1$ 时函数 $s(t)$ 的变化趋势

际结果的一致性,进一步说明了该模型是正确的,为研究该疾病的变化趋势提供了理论参考.由于所获得的数据较少,还不能完整地描述手足口病的传播特征,比如还需考虑该疾病的周期性,在将来有疫苗的情况下,还需要研究具有脉冲接种的模型,并通过数值模拟得到接种疫苗的临界值,这将是下一步的研究重点.

参考文献:

[1] Nong Guang-Min. Autopsy findings in children with hand ,

foot and mouth disease [J]. New England Journal of Medicine 2012 ,367: 91.

[2] Li M Y ,Wang L C. Global Stability in Some SEIR Epidemic Models [M]. Berlin: Springer-Verlag Press ,2002: 295 - 311.

[3] Zhang J , Ma Zhien. Global dynamic behavior of the SEIR epidemic model with the saturating contact rate [J]. Mathematical Biosciences 2003 ,185(1) :15.

[4] 李春,李继光.一类仅在年龄低于 M 的人群中传播的 SEIR 传染病模型 [J]. 郑州轻工业学院学报:自然科学版 2010 25(1) :120.

[5] 安徽省卫生厅. 疾病报告统计 [EB/OL]. [2008 - 05 - 15](2013 - 01 - 20) . <http://www. ahwst. gov. cn/chn200909261727166/article.jsp? articleId=871028>.

[6] Freedman H I ,Tang M X ,Ruan S G. Uniform persistence and flows near a closed positively invariant set [J]. J Dynam Diff Equat ,1994(6) :583.

[7] 安徽省统计局. 安徽省 2002—2008 年国民经济和社会发展统计公报 [EB/OL]. [2011 - 02 - 28](2013 - 01 - 20) . http://www. ahtjj. gov. cn/tjj/web/tjnj_view.jsp? strColId=13787135717978521&_index=1.

(上接第 97 页)

将电机固定,电机速度设定为 25.0 r/min,将电机驱动细分值设定为 2 细分、4 细分和 8 细分时,测得的结果分别为 190.635 r/min,25.000 r/min 和 25.000 r/min.

试验结果表明:测量主要误差来源是电机的振动.电机被固定、步进电机驱动器细分越大,电机振动越小,测量结果越准确.在电机振动不剧烈的情况下,系统对电机测量准确、可靠.

5 结语

本文设计的基于增量式光电编码器电机测速,光电编码器的输出脉冲经斯密特触发器整形后,由单片机进行采集、计算,测得的电机旋转速度和方向由 LCD 进行显示,测速周期由键盘进行设定,测速算法采用 M/T 法.整个系统控制电路的体积小,操作简单方便.电机在振动剧烈的情况下,会影响

系统对电机速度的检测,该系统适用于运行时振动较小的电机的速度测量.

参考文献:

[1] 姜庆明,杨旭,甘永梅,等.一种基于光电编码器的高精度测速和加速度的方法 [J]. 微计算机信息,2004,20(6):48.

[2] 焦东升,张秀彬,应俊豪.基于正交编码器高精度测速方法的研究 [J]. 微型电脑应用,2010,26(10):13.

[3] 宋刚,秦月霞,张凯,等.基于普通编码器的高精度测速方法 [J]. 上海交通大学学报,2002,36(8):1169.

[4] 刘照红,李丽娟.开关电源的共态噪声及抑制措施 [J]. 郑州轻工业学院学报:自然科学版,2001,16(4):14.

[5] 王瑜,王斌.基于 STC 系列微控制器的电机数字测速系统设计 [J]. 电气技术,2012(3):69.

[6] 徐煜明.步进电机速度控制的研究与实现 [J]. 工矿自动化,2007(2):82.