文章编号:2095-476X(2014)02-0105-04

非奇异 H-矩阵的新判据

崔润卿, 闫学华

(河南理工大学 数学与信息科学学院, 河南 焦作 454000)

摘要:针对判别一个矩阵是否为非奇异 H-矩阵的实用而简便的判定条件较少的问题,从矩阵本身元素的性质出发,通过构造正对角矩阵,综合利用不等式的放缩技巧和非奇异 H-矩阵的充分必要条件,推广和改进了一些判定定理,进而扩大了非奇异 H-矩阵的判定范围.数值算例表明,新判据比原有结果有更广的应用范围.

关键词:非奇异 H-矩阵;α-对角占优矩阵;广义严格 α-对角占优矩阵

中图分类号:O151.21 **文献标志码**:A DOI:10.3969/j.issn.2095-476X.2014.02.026

New conditions for nonsingular H-matrix

CUI Run-qing, YAN Xue-hua

(*School of Mathematics and Information Science, He'nan Polytechnic University, Jiaozuo* 454000, *China*)

Abstract: Aiming at the problem of fewer practical decision condition whether a matrix is nonsingular H-matrix, based on the properties of matrix element itself, by constructing positive diagonal matrix and comprehensive utilization of inequality techniques and sufficient and necessary conditions of nonsingular H-matrix, some of the judgement theorem were expanded and improved. And the scope of judging nonsingular matrices was also expanded. The numerical example showed that the new criterion had wide range of application than the original results.

Key words: nonsingular H-matrix; α-diagonally dominant matrix; generalized strictly diagonally dominant α-matrix

0 引言

非奇异 H-矩阵在数值分析、数学物理、控制论等众多学科中有广泛应用,因此对非奇异 H-矩阵的判定一直是学者们所关注的研究课题.然而,判别一个高阶矩阵是否为非奇异 H-矩阵是很困难的.为此,近年来,国内外许多学者对非奇异 H-矩阵的性质和判定做了大量研究,也取得了一些重要成果.本文在文献[1-15]的基础上,结合 α-对角占优矩阵、广义严格 α-对角占优矩阵的相关性质,选取不同的正对角矩阵,综合利用不等式的放缩技巧,讨论非奇异 H-矩阵的判定准则,以期得出一些新的判定范围更广的条件,从而改进和推广有关结果.

1 预备知识

为了简洁叙述,本文约定下列符号:用 $\boldsymbol{C}^{n\times n}$ 表示 n 阶复方阵,设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\boldsymbol{C}^{n\times n}$,如果 $|a_{ii}|\geqslant\Lambda_i(\boldsymbol{A})=\sum_{j\neq 1}|a_{ij}|, i=1,2,(\Lambda_i(\boldsymbol{A})($ 简写为 Λ_i,一

收稿日期:2014-03-03

基金项目:河南省高等教育教学改革研究省级立项项目(2012SJGLX125)

作者简介:崔润卿(1966—),男,河南省偃师市人,河南理工大学副教授,主要研究方向为矩阵分析.

般假定 $\Lambda_i \neq 0, i \in N$),则称 $\boldsymbol{A}$ 为(行)对角占优矩阵,记作 $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{D}_0$. 如果 $|a_{ii}| > \Lambda_i, i = 1,2,\cdots,n$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为(行)严格对角占优矩阵[1],记为 $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{D}$.

定义 1[2] 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \boldsymbol{C}^{n\times n}$,若存在正对角矩阵 $\boldsymbol{X}$,使得 $\boldsymbol{AX}$ 为严格对角占优矩阵,则称 $\boldsymbol{A}$ 为广义严格对角占优矩阵,或称为非奇异 H - 矩阵,记为 $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{D}^*$.

因为非奇异 H - 矩阵的主对角元素非零,且当 $\Lambda_i(\boldsymbol{A}) = 0$(或 $\boldsymbol{C}_i(\boldsymbol{A}) = 0$)时,对任意的 $d > 0$,都有 $|a_{ii}| > d\Lambda_i(\boldsymbol{A}) = 0$(或 $|a_{ii}| > d\boldsymbol{C}_i(\boldsymbol{A}) = 0$),总之对于指标总有行(或列)占优. 因此本文总假定所涉及矩阵满足 $|a_{ii}| > 0, \Lambda_i(\boldsymbol{A}) \neq 0, \boldsymbol{C}_i(\boldsymbol{A}) \neq 0$,对任意的 $i \in N$.

定义 2[3] 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \boldsymbol{C}^{n\times n}$,如果存在 $\alpha \in [0,1]$,使得对任意的 $i \in N$,有 $|a_{ii}| > [\Lambda_i(\boldsymbol{A})]^{\alpha}[\boldsymbol{C}_i(\boldsymbol{A})]^{1-\alpha}$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为严格 α - 对角占优矩阵,记作 $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{D}(\alpha)$.

定义 3[3] 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \boldsymbol{C}^{n\times n}$,若存在正对角矩阵 $\boldsymbol{X}$,使得 $\boldsymbol{AX} \in \boldsymbol{D}(\alpha)$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为广义严格 α - 对角占优矩阵,记为 $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{D}^*(\alpha)$.

注 1 在定义 2 和定义 3 中,若 $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{D}(\alpha)$(或 $\boldsymbol{D}^*(\alpha)$),则当 $\alpha = 1$ 时,有 $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{D}$(或 $\boldsymbol{D}^*$);当 $\alpha = 0$ 时,有 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \in \boldsymbol{D}$(或 $\boldsymbol{D}^*$). 总之,$\boldsymbol{A}$ 为非奇异 H - 矩阵[4]. 所以本文只考虑 $\alpha \in (0,1)$ 的情况.

本文引入以下记号:

$$N_1 = \{i \in N: |a_{ii}| > \Lambda_i(\boldsymbol{A})\}$$

$$N_2 = \{i \in N: 0 < |a_{ii}| \leqslant \Lambda_i(\boldsymbol{A})\}$$

$$N_3 = \{i \in N: \boldsymbol{C}_i(\boldsymbol{A}) > |a_{ii}| > \Lambda_i(\boldsymbol{A})\}$$

$$N_4 = \{i \in N: |a_{ii}| \geqslant \boldsymbol{C}_i(\boldsymbol{A}), |a_{ii}| > \Lambda_i(\boldsymbol{A})\}$$

当 $N_3 \neq \varnothing$ 时,令

$$m_i = \frac{|a_{ii}|}{\Lambda_i(\boldsymbol{A})} \qquad g_i = \frac{\boldsymbol{C}_i(\boldsymbol{A})}{|a_{ii}|}$$

$$M = \max_{i\in N_3}\left\{\frac{\Lambda_i(\boldsymbol{A})}{|a_{ii}|}\right\} \qquad \forall i \in N_3$$

显然 $m_i > 1, g_i > 1, \forall i \in N_3$. 且 $N = N_1 \cup N_2, N_1 = N_3 \cup N_4$. 若 $N_2 = \varnothing$,则 $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{D}$,进而 $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{D}$ 是非奇异 H - 矩阵. 又因为非奇异 H - 矩阵 $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{D}$,至少存在 1 行是严格对角占优的. 所以当 $N_1 = \varnothing$ 时,$\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{D}$ 一定不是非奇异 H - 矩阵. 由此可以总假定 $N_1 \neq \varnothing$, $N_2 \neq \varnothing$.

引理 1[3] 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \boldsymbol{C}^{n\times n}$,若 $N_1 = N_4 \neq \varnothing$ 且存在 $\alpha \in (0,1)$,使

$$\sum_{i\in N_2}\frac{(\max\limits_{j\neq i}|a_{ij}|)(\boldsymbol{C}_i(\boldsymbol{A}))^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\left(1+\sum\limits_{j\in N_1}\frac{\Lambda_j(\boldsymbol{A})}{|a_{jj}|}\right)}{|a_{ii}|^{\frac{1}{\alpha}}+(\max\limits_{j\in N_2,j\neq i}|a_{ij}|)(\boldsymbol{C}_i(\boldsymbol{A}))^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}} < 1 \quad ①$$

则 $\boldsymbol{A}$ 是非奇异 H - 矩阵.

引理 2[3] 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \boldsymbol{C}^{n\times n}, N_3 \neq \varnothing, \alpha \in (\max\limits_{i\in N_3}\log_{m_ig_i}g_i, 1)$,使得

$$\sum_{i\in N_2}\frac{\Lambda_i(\boldsymbol{A})(\boldsymbol{C}_i(\boldsymbol{A}))^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}{|a_{ii}|^{\frac{1}{\alpha}}+(\boldsymbol{C}_i(\boldsymbol{A}))^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}(\sum\limits_{j\in N_2,j\neq i}|a_{ij}|)} < 1$$

则 $\boldsymbol{A}$ 是非奇异 H - 矩阵.

引理 3[5] 若 $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \boldsymbol{C}^{n\times n}$,则 $\boldsymbol{A}$ 为广义严格对角占优矩阵的必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 为广义严格 α - 对角占优矩阵.

2 主要结论

定理 1 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \boldsymbol{C}^{n\times n}$,并存在 $\alpha \in (0,1)$ 使得

$$\sum_{i\in N_2}\frac{(\max\limits_{j\neq i}|a_{ij}|)(\boldsymbol{C}_i(\boldsymbol{A}))^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}(1+(n-n_2)M)}{|a_{ii}|^{\frac{1}{\alpha}}+(\max\limits_{j\in N_2,j\neq i}|a_{ij}|)(\boldsymbol{C}_i(\boldsymbol{A}))^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}} < 1 \quad ②$$

则 $\boldsymbol{A}$ 是非奇异 H - 矩阵.

证明 令

$$\tau = \sum_{i\in N_2}\frac{(\max\limits_{j\neq i}|a_{ij}|)(\boldsymbol{C}_i(\boldsymbol{A}))^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}(1+(n-n_2)M)}{|a_{ii}|^{\frac{1}{\alpha}}+(\max\limits_{j\in N_2,j\neq i}|a_{ij}|)(\boldsymbol{C}_i(\boldsymbol{A}))^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}} \quad ③$$

则 $\tau < 1$,再设

$$d_i = \sum_{i\in N_2}\frac{(\max\limits_{j\neq i}|a_{ij}|)(\boldsymbol{C}_i(\boldsymbol{A}))^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}(1+(n-n_2)M)}{|a_{ii}|^{\frac{1}{\alpha}}+(\max\limits_{j\in N_2,j\neq i}|a_{ij}|)(\boldsymbol{C}_i(\boldsymbol{A}))^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}} + \frac{1-\tau}{n_2} \qquad i \in N_2 \quad ④$$

其中,n_2 是指标集 N_2 所含元素个数,则 $\sum\limits_{i\in N_2} d_i = 1$. 显然 $0 < d_i < 1, \forall i \in N_2$ 由 ④ 式可得

$$d_i(|a_{ii}|)^{\frac{1}{\alpha}} + (\max_{j\in N_2,j\neq i}|a_{ij}|)(\boldsymbol{C}_i(\boldsymbol{A}))^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}) >$$

$$(\max_{j\neq i}|a_{ij}|)(\boldsymbol{C}_i(\boldsymbol{A}))^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}(1+(n-n_2)M)$$

$$d_i|a_{ii}|^{\frac{1}{\alpha}} > (\max_{j\neq i}|a_{ij}|)(\boldsymbol{C}_i(\boldsymbol{A}))^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}) \cdot$$

$$(1+(n-n_2)M) - d_i(\max_{j\in N_2,j\neq i}|a_{ij}|)(\boldsymbol{C}_i(\boldsymbol{A}))^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}) >$$

$$(\boldsymbol{C}_i(\boldsymbol{A}))^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}[(\max_{j\neq i}|a_{ij}|) + (\max_{j\neq i}|a_{ij}|)(n -$$

$$n_2)M - d_i(\max_{j\in N_2,j\neq i}|a_{ij}|)] >$$

$$(\boldsymbol{C}_i(\boldsymbol{A}))^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}[\sum_{j\in N_1}|a_{ij}|\frac{\Lambda_j(\boldsymbol{A})}{|a_{jj}|} + (\max_{j\neq i}|a_{ij}|) -$$

$$d_i(\max_{j\in N_2,j\neq i}|a_{ij}|)] >$$

$$(\boldsymbol{C}_i(\boldsymbol{A}))^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}[\sum_{j\in N_1}|a_{ij}|\frac{\Lambda_j(\boldsymbol{A})}{|a_{ij}|} + d_j(\max_{j\in N_2,j\neq i}|a_{ij}|) -$$

$$d_j(\max_{j\in N_2,j\neq i}|a_{ij}|)] +$$

$$(\max_{j\neq i}|a_{ij}|) - d_i(\max_{j\in N_2,j\neq i}|a_{ij}|)] >$$

$$(\boldsymbol{C}_i(\boldsymbol{A}))^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}[\sum_{j\in N_1}|a_{ij}|\frac{\Lambda_j(\boldsymbol{A})}{|a_{jj}|} + d_j(\max_{j\in N_2,j\neq i}|a_{ij}|) +$$

$$(\max_{j\neq i}|a_{ij}|)(1 - d_j + d_i)]$$

由 $\sum_{j\in N_2} d_i = 1$ 可知

$$|a_{ii}|^{\frac{1}{\alpha}}d_i > (\boldsymbol{C}_i(\boldsymbol{A}))^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}[(\sum_{j\in N_1}|a_{ij}|) +$$

$$d_j(\sum_{j\in N_2,j\neq i}|a_{ij}|)] \qquad \forall i \in N_2 \tag{⑤}$$

令

$$x_i = \begin{cases} M & 当\ i \in N_1 \\ d_i & 当\ i \in N_2 \end{cases}$$

构造正对角矩阵 $\boldsymbol{X} = diag(x_1, x_2, \cdots, x_n)$,并令 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{AX} = (b_{ij}) \in \boldsymbol{C}^{n\times n}$,根据集合 N_1 的定义,可知 $\forall \alpha \in (0,1)$,都有 $|a_{ii}| > [\Lambda_i(\boldsymbol{A})]^{\alpha}[\boldsymbol{C}_i(\boldsymbol{A})]^{1-\alpha}$,于是有如下 2 种情况.

当 $i \in N_1$ 时,有

$$[\Lambda_i(\boldsymbol{B})]^{\alpha}[\boldsymbol{C}_i(\boldsymbol{B})]^{1-\alpha} = [M\sum_{j\in N_1,j\neq i}|a_{ij}| +$$

$$\sum_{j\in N_2}(|a_{ij}|d_j)]^{\alpha}(M\sum_{j\neq i}|a_{ij}|)^{1-\alpha} <$$

$$[\sum_{j\in N_1,j\neq i}|a_{ij}| + \sum_{j\in N_2}(|a_{ij}|)]^{\alpha}(M\sum_{j\neq i}|a_{ij}|)^{1-\alpha} <$$

$$[\sum_{j\in N_1,j\neq i}|a_{ij}| + \sum_{j\in N_2}(|a_{ij}|)]^{\alpha}(\sum_{j\neq i}|a_{ij}|)^{1-\alpha} \leqslant$$

$$|a_{ii}|M = |b_{ii}|$$

当 $i \in N_2$ 时,由 ⑤ 式可得

$$|a_{ii}|^{\frac{1}{\alpha}}x_i = |a_{ii}|^{\frac{1}{\alpha}}d_i >$$

$$(\boldsymbol{C}_i(\boldsymbol{A}))^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}[M(\sum_{j\in N_1}|a_{ij}|) + d_j(\sum_{j\in N_2,j\neq i}|a_{ij}|)]$$

$$|a_{ii}|x_i^{\alpha} > (\boldsymbol{C}_i(\boldsymbol{A}))^{1-\alpha}[M(\sum_{j\in N_1}|a_{ij}|) +$$

$$d_j(\sum_{j\in N_2,j\neq i}|a_{ij}|)]^{\alpha}$$

$$|a_{ii}|(d_j)^{\alpha}(d_j)^{1-\alpha} >$$

$$(d_j)^{1-\alpha}(\boldsymbol{C}_i(\boldsymbol{A}))^{1-\alpha}[M(\sum_{j\in N_1}|a_{ij}|) +$$

$$d_j(\sum_{j\in N_2,j\neq i}|a_{ij}|)]^{\alpha}$$

即可得

$$|b_{ii}| = |a_{ii}|d_i > [R_i(\boldsymbol{B})]^{\alpha}[\boldsymbol{C}_i(\boldsymbol{B})]^{1-\alpha} \quad i \in N_2$$

综上所述

$$|b_{ii}| > [R_i(\boldsymbol{B})]^{\alpha}[\boldsymbol{C}_i(\boldsymbol{B})]^{1-\alpha}$$

$$i \in N = N_1 \cup N_2$$

根据定义 2 及 ③ 式可知 $\boldsymbol{B} \in \boldsymbol{D}(\alpha)$,即 $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{D}^*(\alpha)$. 再由引理 3 可得 $\boldsymbol{A}$ 是非奇异 H - 矩阵.

3　数值算例

例 1　设

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 & 1 \\ 1 & 8 & 2 & 0 \\ 1 & 0.5 & 6 & 1 \\ 1 & 3.5 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

则有

$$N_3 = \{3\} \qquad N_4 = \{2\} \qquad N_2 = \{1, 4\}$$

$$\Lambda_1(\boldsymbol{A}) = 9 \qquad a_{11} = 7 \qquad C_1(\boldsymbol{A}) = 3$$

$$\Lambda_2(\boldsymbol{A}) = 3 \qquad a_{22} = 8 \qquad C(\boldsymbol{A}) = 8$$

$$\frac{\Lambda_2(\boldsymbol{A})}{|a_{22}|} = \frac{3}{8}$$

$$\Lambda_3(\boldsymbol{A}) = \frac{5}{2} \qquad a_{33} = 6 \qquad C_3(\boldsymbol{A}) = 7$$

$$\frac{\Lambda_3(\boldsymbol{A})}{|a_{33}|} = \frac{5}{12}$$

$$\Lambda_4(\boldsymbol{A}) = 5 \qquad a_{44} = 5 \qquad C_4(\boldsymbol{A}) = 2$$

取 $\alpha = \frac{3}{4} \in (0,1)$,根据 ② 式则有 $\boldsymbol{\tau} = 0.951\,3 < 1$. 由定理 1 可知 $\boldsymbol{A}$ 是非奇异 H - 矩阵.

注意 $N_3 = \{3\} \neq \varnothing, N_4 = \{2\} \neq \varnothing$,即 $\boldsymbol{A}$ 满足引理 1 的条件,但是计算 ① 无论 α 可取什么值,总有

$$\frac{\frac{19}{6}\times(3)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}{7^{\frac{1}{\alpha}} + (3)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}} + \frac{\frac{133}{48}\times(2)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}{7^{\frac{1}{\alpha}} + (2)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}} > 1$$

因此该矩阵不能用引理 1 进行判定,所以定理 1 比引理 1 有更广泛的应用范围.

上述数值算例表明,文中定理 1 和引理 1 是互不包含的. 同时在例 1 中,矩阵不满足文献[6]中定理 2 的条件,不满足文献[7]中定理 1 和定理 2 的条件,不满足文献[8]中定理 1 的条件,因此无法由文献[6-8]中相应定理进行判定. 上述数值算例也有效说明了由 α - 对角占优矩阵、广义严格 α - 对角占优矩阵相关性质出发,通过构造正对角矩阵,综合利用不等式的放缩技巧和非奇异 H - 矩阵的充分必

要条件,推广和改进了一些判定定理,进而扩大了非奇异 H - 矩阵的判定范围. 当然,由实际问题转化而来的矩阵的阶数越来越高,怎样迅速判别一个高阶矩阵是否为非奇异 H - 矩阵,将是下一步研究工作的重要课题.

参考文献:

[1] 陈公宁. 矩阵理论与应用[M]. 北京:科学出版社,2007:225-227.

[2] 范迎松,陆全,徐仲. 非奇异 H - 矩阵的一组判定条件[J]. 高校应用数学学报,2011,26(4):474.

[3] 李敏,孙玉祥. 非奇异 H - 矩阵的新判定准则[J]. 工程数学学报,2012,29(5):715.

[4] Huang T Z, Li W, Lei G Y. Contributions to nonsingular H-matrices[J]. ZAMM-Zeitschrift fur Angewandte Mathematik and Mechanik,2000,80(1):493.

[5] Sun Y X. An improvement on a theorem by Ostrowski and its applications[J]. Northeastern Mathematical Journal, 1991,7(4):497.

[6] 侯进军,李斌. H - 矩阵的一组新判定[J]. 应用数学学报,2009,31(2):266.

[7] 徐仲,陆全. 判定广义严格对角占优矩阵的一组充分条件[J]. 工程数学学报,2001,18(3):11.

[8] 庹清. 非奇异 H - 矩阵判定的新条件[J]. 工程数学学报,2008,25(4):749.

[9] 黄廷祝. 非奇异 H - 矩阵的简捷判据[J]. 计算数学,1993(3):318.

[10] Varge R S. On recurring throrems on diagonal dominance[J]. Linear Algebra Appl,1976(13):1.

[11] 崔润卿,闫学华. 非奇异 H - 矩阵的一组新判据[J]. 郑州轻工业学院学报:自然科学版,2013,28(3):98.

[12] 李敏,孙维娜,张雪. α - 双对角占优矩阵的等价表征及应用[J]. 北华大学学报:自然科学版,2012,12(4):396.

[13] 宋岱才,赵晓颖. α - 链严格对角占优矩阵的一个充要条件[J]. 辽宁石油化工大学学报,2011,31(3):81.

[14] 王再玉,赵鸣霖. 广义 α - 对角占优矩阵与非奇异 H - 矩阵的判别[J]. 长春理工大学学报:自然科学版,2011(3):171.

[15] 秦建国,谢栋梁,王静娜. 一类可以对角化的矩阵[J]. 郑州轻工业学院学报:自然科学版,2013,28(2):106.

(上接第 98 页)

析,得到了以下结论.

1)节点在轴压作用下,焊缝区域进入塑性后插板局部屈曲,平面外失稳倾斜导致节点失效.

2)节点主要因为插板失效而破坏,插板相对于管壁较弱,工程中可以适当增加插板厚度或采取在插板两边设置加劲肋等加强措施.

3)节点从开始进入塑性到最后破坏,在很小的时间段内完成,并且未产生较大的位移增量,具有较差的塑性变形能力,破坏呈脆性.

4)该模型能较好地模拟节点破坏模式、应力分布和极限承载力,模拟结果均较好地与试验结果吻合,所以可用作斜插板焊接方管节点参数分析的基础.

参考文献:

[1] 赵熙元. 钢管结构设计[J]. 钢铁技术,1997(1):47.

[2] 陈以一,陈扬骥. 钢管结构相贯节点的研究现状[J]. 建筑结构,2002,32(7):227.

[3] 吴耀华,吴文奇. 钢管在结构工程中的应用与发展[J]. 钢结构,2005,20(2):44.

[4] 魏琳,陈誉. 圆支管-H 型钢主管 T 型节点轴压承载力的有限元分析[J]. 郑州轻工业学院学报:自然科学版,2013,28(1):80.

[5] Thornton W A. Bracing connections for heavy construction[J]. Eng J AISC,1984,21(3):139.

[6] 刘红军,李正良. 特高压钢管输电塔插板连接 K 型节点的受力性能及承载力研究[D]. 重庆:重庆大学,2010.

[7] 舒兴平,彭欢佳,袁智深. K 形管板节点极限承载力研究[J]. 建筑结构,2012,42(2):93.

[8] Andrew P Voth, Jeffrey A Packer. Numerical study and design of skewed X-type ranch plate-to-circular hollow section connections[J]. Journal of Construction Steel Research,2011,68(1):1.

[9] GB/T 228—2002,金属材料室温拉伸试验方法[S].