文章编号:2095-476X(2014)03-0092-05

一种基于预处理共轭梯度法的给水管网水力计算方法

王美香

(郑州旅游职业学院 基础部, 河南 郑州 450009)

摘要:提出了一种新的给水管网水力计算方法.该方法对给水管网系统的节点流量连续性方程进行重新构造,用改进的Cholesky分解方法对重新构造的矩阵进行三角分解,然后使用预处理共轭梯度法求解.经用供水管网模型进行验证并与EPANET软件的计算结果进行比较,结果表明:该算法共迭代5次,用时0.102 s,与EPANET混合节点-环方法的求解精度和速度非常接近,且弥补了EPANET软件的应用缺陷,可用于求解大型城市的给水管网系统.

关键词:给水管网水力计算方法;预处理共轭梯度法;Cholesky分解;混合节点-环方法

中图分类号:O022;TU991 **文献标志码**:A DOI:10.3969/j.issn.2095-476X.2014.03.021

A calculation method of water distribution network hydraulic based on preconditioned conjugate gradient method

WANG Mei-xiang

(*Foundation Department, Zhengzhou Tourism College, Zhengzhou* 450009, *China*)

Abstract: A calculation method of water distribution network hydraulic was proposed. The nodes flow continuity equation of water distribution system was reconstructed, the reconstructed matrix was decomposed triangularly by a modified Cholesky decomposition method, and thus it was suitable for the use of preconditioned conjugate gradient method. It was tested by the model of water distribution network(WDN) hydraulic. Compared with calculation result of EPANET software, the proposed algorithm does total iteration five times in 0.102 s, which closed to the result of mixed node-ring method used in EPANET software in the aspect of accuracy and speed. The proposed algorithm overcame the defects of EPANET software, which could be used to solve large-scale urban water supply network system.

Key words: calculation method of water distribution network (WDN) hydraulic; preconditioned conjugate gradient method; Cholesky decomposition; mixed node-ring method

0 引言

随着城市化进程的加快,供水问题成为当前影响我国经济社会可持续发展的问题之一,实现供水管理的科学化和现代化是解决供水问题的有效途径.给水管网水力计算一直都是给水管网研究领域的重要课题[1-3],因为水力计算是管网规划、设计及动态运行管理的科学依据[4-6].特别是,供水管网的

收稿日期:2014-03-04

作者简介:王美香(1981—),女,河南省商水县人,郑州旅游职业学院讲师,硕士,主要研究方向为数学最优化理论及应用.

优化调度,更需要一种快速的水力计算方法来提高调度的实时性. 根据求解的未知量是管段流量还是节点水压,水力计算算法可分为解环方程组法、解管段方程组法和解节点方程组法. 其中,解环方程组法仅限于解决方程个数较少的手工列表计算;解管段方程组法计算过程太复杂,工程实际中极少使用[7]. 目前常用的计算软件 EPANET,采用混合节点–环方法求解给定时间点给水管网水力状态的节点流量连续性和管段水头损失. EPANET 是由美国环保总署开发的主要用于有压给水管网系统(包括水库、水泵、水池、泵站等)的水力水质计算软件[8-9],它可以对有压给水管道的水力特性以及水质特性变化进行长时间动态仿真模拟,具有管网水力计算、工况运行模拟、基本信息管理、仿真运行管理等功能,运用 EPANET 可以实现给水管网模型基本图形录入的可视化操作. 该软件计算速度快、准确性高,但其结果显示有局限性,运行结果 1 次只能看到 1 个属性信息,且该软件仅限于教学和科研使用,尚不能商用. 鉴于此,本文基于预处理共轭梯度法,运用解节点方程组法将非线性问题转化为线性问题,然后通过计算机编程用迭代法求解,从而达到对给水管网系统进行快速水力计算的目的.

1 给水管网水力特性

给水管网系统是一类规模巨大且运行工况复杂多变的网络系统,通常将其简化、抽象和标识为便于使用图形和数据表达与分析的应用系统,包括给水管网系统中各组成部分的拓扑连接关系、工程属性、水力特性等,常称为给水管网模型[10]. 本文应用预处理共轭梯度法求解给水管网模型相关问题.

经过简化,可将给水管网系统问题转化为数学问题,最终将计算结果应用到实际中去. 通常,简化应满足宏观等效原则和可容忍小误差原则. 简化后的给水管网需要进一步抽象成为仅由管段和节点组成的管网模型,用图论中的关联矩阵来刻画,记为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$. 考虑设定了初始方向的给水管网图,则关联矩阵中的每个元素 a_{ij} 可表示为

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & \text{若管段}\,j\,\text{与节点}\,i\,\text{关联,且节点}\,i\,\text{为管段}\,j\,\text{的起始端点}\\ -1, & \text{若管段}\,j\,\text{与节点}\,i\,\text{关联,且节点}\,i\,\text{为管段}\,j\,\text{的终止端点}\\ 0, & \text{若管段}\,j\,\text{与节点}\,i\,\text{不关联}\end{cases}$$

其中,$i=1,2,\cdots,n_J,j=1,2,\cdots,n_P$. 显然,对于较大规模的城市给水管网,相应的给水管网图是一个稀疏图,其关联矩阵是一个 $n_J\times n_P$ 的稀疏矩阵. 类似地,可建立其环路矩阵.

给水管网的水力特性是指管网模型中节点和管段传递、输送流量和能量的特性,其理论基础是质量守恒定律、能量守恒定律和动量守恒定律. 通常分析给水管网水力特性时,仅考虑质量守恒定律和能量守恒定律. 笔者将采用解节点方程法来获得给水管网系统的水力特性参数.

综合考虑节点流量连续性方程组、环能量方程组和管段压降方程组,则可以用向量方式将给水管网水力特性方程组简写为

$$\begin{cases}\boldsymbol{Aq}+\boldsymbol{Q}=0\\ \boldsymbol{Lh}=0\\ \boldsymbol{h}=\boldsymbol{Sq}^n\end{cases}$$

其中,$\boldsymbol{A}$ 是给水管网图的关联矩阵,管段流量向量 $\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}=(q_1\ q_2\ q_3\cdots q_{n_P})^{\mathrm{T}}$,节点流量向量 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=(Q_1\ Q_2\ Q_3\cdots\ Q_{n_J})^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{L}$ 是给水管网图的环路矩阵,管段压降向量 $\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}=(h_1\ h_2\ h_3\cdots h_{n_R})^{\mathrm{T}}$,管段摩阻系数对角阵 $\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}s_1&0&\cdots&0\\0&s_2&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&s_{n_R}\end{pmatrix}$,$(\boldsymbol{q}^n)^{\mathrm{T}}=(q_1^n\ q_2^n\ q_3^n\cdots q_{n_P}^n)^{\mathrm{T}}$ 中的指数 n 由所采用的水头损失公式而定. 为了更好地推导给水管网的水力计算方程,记 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{Sq}^{n-1}$,则 $\boldsymbol{h}=\boldsymbol{Mq}$,$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{h}$,因此解节点方程法的主要公式又可以写成

$$\boldsymbol{AM}^{-1}\boldsymbol{h}=\boldsymbol{AM}^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}=\boldsymbol{Q}$$

显然,上式是以节点水头为自变量的节点方程,而且是线性表达式,在实际求解过程中须采用迭代方式实现,即上述方程的求解过程是一个迭代过程,需要拟定管段的初始流量,但不需要拟定节点的初始水头. 从迭代的角度来说,如果初始流量分配不当,可能会增加迭代次数,但一般不会导致不收敛. 因为在实际的给水系统中,当给定某种工况时,一定存在一种确定的供水状态,即节点水头是存在的、确定的.

2 预处理共轭梯度法给水管网水力计算

无约束最优化问题一直都是学术界的研究热

点之一[11-14],共轭梯度法及其各种改进算法都属于无约束最优化问题的求解方法[15-17].共轭梯度法最早是由计算数学家 M. R. Hestenes 等[18]于 1950 年代初为求解线性方程组 $\boldsymbol{A}x=\boldsymbol{b}(x\in R^n)$ 而提出的.当 $\boldsymbol{A}$ 为对称正定阵时,上述线性方程组等价于最优化问题 $\min\limits_{x\in R^n}\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}x-\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}x$. 由此,M. R. Hestenes 等[18]的方法也可视为求二次函数极小值的共轭梯度法. 1964 年,R. Fletcher 等[19]将此方法推广到非线性优化,得到了求一般函数极小值的共轭梯度法. 共轭梯度法是一种实用的线性方程组迭代求解方法:先用解节点方程法把复杂的非线性的管网稳态方程组转化为比较简单的线性表达式,然后用迭代法求解. 这是一种适合计算机实现的管网水力计算方法.

在公式①中,当未知量全为节点水压时,方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{AM}^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是一个 $N_J\times N_J$ 的对称正定阵,且具有弱主对角优势. 对于大型给水管网,该系数矩阵是稀疏的,通常其非零元占元素总数不到5%. 数值计算领域的研究表明[19]:对于高阶的此类方程组,由于其系数具有大型稀疏特点,且对称正定,适合采用预处理共轭梯度法来求解;对于一般病态的大型稀疏矩阵,共轭梯度法只需远小于 N(N 为矩阵阶数)次迭代就可以得到满足精度要求的数值解;如果矩阵病态较严重,则可以使用预处理方法改善其条件,加快迭代的收敛速度. 当未知量中既含有节点水头又含有节点流量时,就必须构造一个类似于①的方程组,使其系数矩阵为对称正定阵.

2.1 给水管网水力特性方程组系数矩阵的对称正定预处理

设给水管网模型中流量已知而水头未知的节点集合为 $J(D)$,节点个数为 C_D;流量未知而水头已知的节点集合为 $J(UD)$,节点个数为 C_{UD}. 设节点集合 $J(D)$ 的关联矩阵、节点水头和节点流量分别为 $\boldsymbol{A}_D$,$\boldsymbol{H}_D$ 和 $\boldsymbol{Q}_D$,节点集合 $J(UD)$ 的关联矩阵、节点水头和节点流量分别为 $\boldsymbol{A}_{UD}$,$\boldsymbol{H}_{UD}$ 和 $\boldsymbol{Q}_{UD}$. 则节点流量连续性方程组又可以表示为

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}_D\boldsymbol{q}+\boldsymbol{Q}_D=0\\ \boldsymbol{A}_{UD}\boldsymbol{q}+\boldsymbol{Q}_{UD}=0\end{cases}$$

由于 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{\beta h}$,且 $\boldsymbol{\beta}$ 是一个 $N_P\times N_P$ 阶的对角阵,则

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}_D\boldsymbol{\beta h}+\boldsymbol{Q}_D=0\\ \boldsymbol{A}_{UD}\boldsymbol{\beta h}+\boldsymbol{Q}_{UD}=0\end{cases} \quad ②$$

管段能量方程 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}=\boldsymbol{h}$ 也可以改写为

$$\boldsymbol{h}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}=\boldsymbol{A}_D^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_D+\boldsymbol{A}_{UD}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_{UD} \quad ③$$

将式③代入方程组②可得

$$\boldsymbol{A}_D\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{A}_D^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_D+\boldsymbol{A}_D\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{A}_{UD}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_{UD}+\boldsymbol{Q}_D=0 \quad ④$$

$$\boldsymbol{A}_{UD}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{A}_D^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_D+\boldsymbol{A}_{UD}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{A}_{UD}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_{UD}+\boldsymbol{Q}_{UD}=0 \quad ⑤$$

在方程④中,当未知向量 $\boldsymbol{H}_D$ 已知时,方程⑤中的未知量为 $\boldsymbol{Q}_{UD}$. 在给水管网水力计算的每次迭代求解过程中,都将生成形如式④⑤的线性方程组.

记 $\tilde{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{A}_D\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{A}_D^{\mathrm{T}}\in R^{C_D\times C_D}$,$\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{A}_D\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{A}_{UD}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_{UD}+\boldsymbol{Q}_D)\in R^{C_D}$,$x=\boldsymbol{H}_D\in R^{C_D}$,则方程组④可以改写为

$$\tilde{\boldsymbol{A}}x=\boldsymbol{b}$$

在规模较大的市政给水管网系统中,通常 C_D 都较大,因此系数矩阵 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 是一个大型稀疏矩阵,其条件数非常大. 为保证处理后的方程组仍具有对称正定性,需要寻求预处理对称正定阵 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{WW}^{\mathrm{T}}$,其中 $\boldsymbol{W}$ 为非奇异矩阵,使得

$$\tilde{\boldsymbol{A}}x=\boldsymbol{b}\Leftrightarrow(\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{W}^{-\mathrm{T}})\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}x=\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{b}$$

即求解

$$\hat{\tilde{\boldsymbol{A}}}\hat{x}=\hat{\boldsymbol{b}} \quad ⑤$$

其中,$\hat{\tilde{\boldsymbol{A}}}=\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{W}^{-\mathrm{T}}$,$\hat{x}=\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}x$,$\hat{\boldsymbol{b}}=\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{b}$,且 $\hat{\tilde{\boldsymbol{A}}}$ 的条件数得到较大改善. 经过预处理后的给水管网水力计算特性方程组可在较少的迭代次数内收敛. 所以,预处理矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的选取是给水管网快速水力计算的关键,这是一个矩阵分解的问题.

满足上述要求的对称正定阵 $\boldsymbol{M}$ 的预处理方法较多[20-21]. 在给水管网水力特性方程组中,其系数矩阵为正定矩阵,而 Cholesky 分解方法和改进的 Cholesky 分解方法是专门针对正定矩阵的三角分解提出的,其优点是不用选取主元,不会产生因中间量放大使计算不稳定的显现. 本文预处理后的系数矩阵 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 是对称正定的,因此,将采用改进的 Cholesky 分解方法来实现.

设 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{WW}^{\mathrm{T}}$,其中 $\boldsymbol{W}$ 是基于改进的 Cholesky 分解方法得到的下三角矩阵. 取 $\boldsymbol{M}\approx\tilde{\boldsymbol{A}}$,则有 $\hat{\tilde{\boldsymbol{A}}}=\boldsymbol{W}^{-1}(\boldsymbol{WW}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{W}^{-\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}$,即 $cond_2(\hat{\tilde{\boldsymbol{A}}})\approx1$,$cond_2(\boldsymbol{M}^{-1}\cdot\tilde{\boldsymbol{A}})\approx1$,此时条件数得到较大改善,几乎趋于最小.

注意到 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 是大型稀疏矩阵,$\boldsymbol{W}$ 具有与 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 相同的稀疏特性.

2.2 基于预处理共轭梯度法的给水管网水力特性方程组求解

根据公式⑤的描述,设 $r(x)=\boldsymbol{b}-\tilde{\boldsymbol{A}}x$,则给水管网水力计算问题可以等价地转换为无约束多维最

优极值问题：

$$\min r(x) \qquad x \in R^{C_D}$$

由线性方程组的共轭梯度法迭代求解理论可知，对于上述无约束多维最优极值问题，最多仅需 C_D 次迭代便可求得方程组的解.

基于预处理共轭梯度法求解给水管网水力特性方程组⑤的方法如下：

1）任意给定初始值 $\tilde{x}^{(0)} \in R^{C_D}$，迭代终止精度 $\varepsilon > 0$，最大迭代次数 $MAX \leqslant C_D$；

2）$r^{(0)} = \boldsymbol{b} - \tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{x}^{(0)}$，由 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{h}_0 = r^{(0)}$ 解出 $\boldsymbol{h}_0$，并令 $\boldsymbol{p}_0 = \boldsymbol{h}_0$，即 $\boldsymbol{p}_0 = \boldsymbol{h}_0 = \boldsymbol{M}^{-1} r^{(0)}$；

3）对 $k = 0,1,2,\cdots$，依次计算

$$\boldsymbol{\alpha}_k = \frac{\boldsymbol{h}_k , r^{(k)}}{\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_k , \boldsymbol{p}_k} \qquad x^{(k+1)} = x^{(k)} + \boldsymbol{\alpha}_k \boldsymbol{p}_k$$

由于

$$0 = (\tilde{\boldsymbol{p}}_k , \tilde{\boldsymbol{A}} , \tilde{\boldsymbol{p}}_i) = (\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}_k , \boldsymbol{W}^{-1}\tilde{A}\boldsymbol{W}^{-T}\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}_i) = (\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}_k , \boldsymbol{W}^{-1}\tilde{A}\boldsymbol{p}_i) = (\boldsymbol{W}^{-T}\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}_k , \tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{p}_i) = (\boldsymbol{p}_k , \tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{p}_i)$$

所以 $\{p_0 , p_1 , p_2 , \cdots\}$ 是 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 的正交组，互为共轭的方向向量，计算残差 $r^{(k+1)} = r^{(k)} - \boldsymbol{\alpha}_k \tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{p}_k$，由 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{h}_{k+1} = r^{(k+1)}$ 解出 $\boldsymbol{h}_{k+1} = \boldsymbol{M}^{-1} r^{(k+1)}$，计算

$$\boldsymbol{\beta}_{k+1} = \frac{(\boldsymbol{h}_{k+1} , r^{(k+1)})}{(\boldsymbol{h}_k , r^{(k)})} \qquad \boldsymbol{p}_{k+1} = \boldsymbol{h}_{k+1} + \boldsymbol{\beta}_{k+1}\boldsymbol{p}_k$$

若 $r^{(k)} = 0$，或 $(\boldsymbol{p}_k , \tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{p}_k) = 0$，或 $k = MAX \leqslant C_D$，或 $\| r^{(k)} \|_2 < \varepsilon$ 时，计算终止，此时有 $x^{(k)} = x^*$ 为方程组 $\tilde{\boldsymbol{A}}x = \boldsymbol{b}$ 的最终数值迭代解.

3　数值算例

为了验证本文提出算法的有效性，以一个具有 760 个节点、880 条管段和 3 个水源的给水管网模型为例进行分析. 模型的拓扑结构示意图如图 1 所示.

计算过程各参数设置如下：设定某时段的总供水量为 162 513 0 m^3，并预分配各节点的流量，水源 A 和水源 B 的流量分别为 800 m^3 和 1 289 m^3，相应地面标高为 9.6 m 和 6.43 m，水源 C 的地面标高为 14 m，其出厂压力给定为 36 m. 为了使用 EPANET 软件进行计算，需要在 EPANET 中将水源 A 和 B 分别设定为普通节点. 2 种计算方法中迭代误差均设置为 20 m^3/h. 经计算后，本文算法共迭代 5 次，计算时间 0. 102 s，EPANET 共迭代 5 次，计算时间 0.1 s. 2 种方法对节点自由水头和管段水力坡降计算结果的相对误差均小于 0.005. 因此，本文算法是可行的，在迭代次数与计算时间上均与 EPANET 相差不大.

4　结论

本文设计了一种基于预处理共轭梯度法的给水管网水力计算的数值求解方法. 数值算例结果表明，本文提出的算法具有较好的实时性和准确性，在迭代次数与计算时间上均与 EPANET 相差不大，

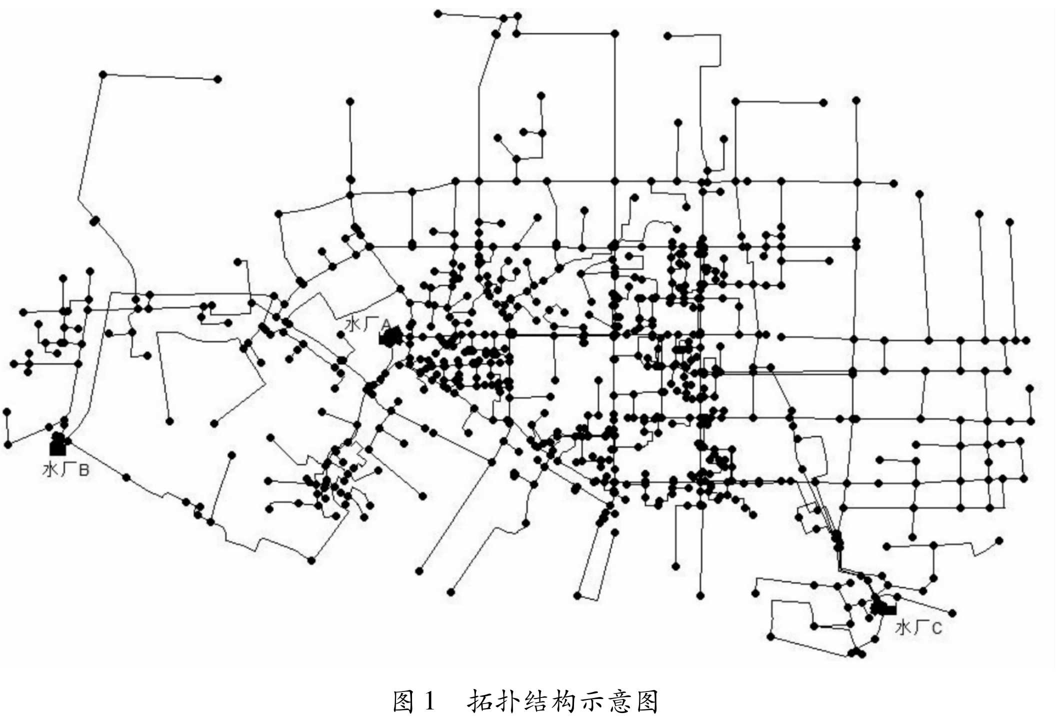

图 1　拓扑结构示意图

可用于大型城市给水管网系统给水管网规划、给水管网改造等水力计算与分析.本算法能否进一步优化、能否应用于电网系统,还有待深入研究.

参考文献:

[1] Basha H A, Malaeb L N. Eulerian-Lagrangian method for constituent transport in water distribution networks[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2007(10): 1155.

[2] 陆际汉. 给水管网平差精确计算法——水力比拟法[J]. 中国给水排水, 2010, 26 (24): 62.

[3] 陈喆, 俞国平. 给水管网双向流管段水力计算分析[J]. 苏州科技学院学报: 工程技术版, 2012, 25(3): 9.

[4] 赵洪宾. 给水管网系统理论与分析[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2003.

[5] 段焕丰. 城市供水系统动态建模技术研究[D]. 上海: 同济大学, 2006.

[6] 王国栋, 俞国平. 管段重要性指数在水力模型校核中的应用[J]. 苏州科技学院学报: 工程技术版, 2007, 20(1): 53.

[7] 彭永臻, 崔福义. 给水排水工程计算机应用[M]. 2版. 北京: 中国建筑工业出版社, 2002.

[8] Rossman L A, Boulos P, Altman T. Discrete volume-element method for network water-quality models[J]. Water Resour Plann Manage, 1993, 119(5): 505.

[9] Rossman L A. EPANET 2 User's Manual[M]. Cincinnati: National Risk Management Research Laboratory (U. S. Environmental Protection Agency), 2000.

[10] 严煦世, 刘遂庆. 给水排水管网系统[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2002.

[11] Nocedal J, Wright S J. Numerical Optimization[M]. New York: Springer Verlag, 2006.

[12] Andrei N. New accelerated conjugate gradient algorithms as a modification of Dai-Yuan's computational scheme for unconstrained optimization[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2010, 234(12): 3397.

[13] Andrei N. Open problems in conjugate gradient algorithms for unconstrained optimization[J]. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 2011, 34(2): 319.

[14] Hu C M, Wan Z. An extended spectral conjugate gradient method for unconstrained optimization problems[J]. British Journal of Mathematics & Computer Science, 2013, 3(2): 86.

[15] Du S Q, Chen Y Y. Global convergence of a modified spectral FR conjugate gradient method[J]. Appl Math Comput, 2008, 202: 766.

[16] Yu G H, Guan L T, Wei Z X. Globally convergent Polak-Ribire-Polyak conjugate gradient methods under a modified Wolfe line search[J]. Appl Math Comput, 2009, 215(8): 3082.

[17] An X M, Li D H, Xiao Y H. Sufficient descent directions in unconstrained optimization[J]. Comput Optim Appl, 2011, 48: 515.

[18] Hestenes M R, Stieefl E L. Methods of conjugate gradients of solving linear systems[J]. Journal of Research of the National Bureau of Standards, 1952, 5(2): 409.

[19] Fletcher R, Reeves C. Function minimization by conjugate Gradients[J]. Computer Journa, 1964(7): 149.

[20] 李庆杨. 数值分析[M]. 北京: 清华大学出版社, 2006.

[21] 吴勃英. 数值分析[M]. 北京: 高等教育出版社, 2007.