

# 一种新六维 Duffing-Lu 超混沌系统的同步控制

王东晓

(郑州航空工业管理学院 数理系, 河南 郑州 450015)

**摘要:**针对一种新六维 Duffing-Lu 超混沌系统的同步问题,基于 Lyapunov 稳定性理论,分别采取非线性同步控制和线性同步控制两种方案,通过选取合适的控制器参数( $m$ )值,使  $A + mI$  为正定矩阵从而实现同步. Matlab 数值仿真结果表明,在采用相同参数、相同初始值的情况下,两种方案均可实现同步,其中线性同步控制的控制器更为简单,且可以实现参数识别.

**关键词:**六维 Duffing-Lu 超混沌系统;混沌同步控制;Lyapunov 稳定性理论

**中图分类号:**TP27 **文献标志码:**A **DOI:**10.3969/j.issn.2095-476X.2015.3/4.027

## Synchronization control of a new six-dimensional Duffing-Lu hyper-chaotic system

WANG Dong-xiao

(Department of Mathematics and Physics, Zhengzhou Institute of Aeronautical Industry Management, Zhengzhou 450015, China)

**Abstract:** Aiming at synchronization problem of a new six-dimensional Duffing-Lu hyper-chaotic system, a new controller was designed through two different methods of synchronization control and non-synchronization control based on the Lyapunov stability theory. By choosing proper parameter ( $m$ ) to set  $A + mI$  as positive definite matrix, synchronization was realized. Matlab numerical simulations results showed that both the methods could realize synchronization on the condition of the same parameter and same initial value, and the synchronization controller was proved to be simpler and could realize parameter identification.

**Key words:** six-dimensional Duffing-Lu hyper-chaotic system; chaotic synchronization control; Lyapunov stability theory

## 0 引言

生活中混沌现象几乎无处不在,为求解混沌问题,混沌理论研究从20世纪开始就引起科技工作者的广泛关注,实验中观察到的混沌同步现象<sup>[1-2]</sup>,拉开了混沌同步研究的序幕.混沌同步在诸多领域具有广泛的应用前景,实现混沌同步的

方法也多种多样.新的混沌系统不断被发现<sup>[3-7]</sup>,通过整合已知的混沌系统能不断得到新的超混沌系统<sup>[8-9]</sup>,超混沌系统、多翼混沌系统、高维混沌系统成为混沌研究领域新的热点.其中,超混沌具有更加复杂的拓扑结构,其同步虽然更难以实现,但更具有实际意义.

本文拟对一个新六维 Duffing-Lu 超混沌系

收稿日期:2015-01-08

基金项目:河南省基础与前沿技术研究计划项目(142300410410);河南省教育厅项目(2011B110030)

作者简介:王东晓(1974—),男,河北省威县人,郑州航空工业管理学院讲师,主要研究方向为动力系统及其应用.

统<sup>[9]</sup>的同步问题进行研究,设计同步方案,给出理论证明,并通过数值仿真验证该方案的有效性与可行性.

### 1 一种新的六维混沌系统

基于混沌系统的可加性,对 Duffing 混沌系统和 Lu 混沌系统进行整合<sup>[8]</sup>,得到一个新的六维 Duffing-Lu 超混沌系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(x_2 - x_1) + bx_6 \\ \dot{x}_2 = -x_1x_3 + cx_2 \\ \dot{x}_3 = x_1^2 - dx_3 \\ \dot{x}_4 = x_5 \\ \dot{x}_5 = -ex_5 - x_4^3 + f\cos x_6 \\ \dot{x}_6 = gx_2x_3 \end{cases} \quad (1)$$

当系统参数取值  $a = 36, b = 1, c = 20, d = 3, e = 0.6, f = 3, g = 1$  时,对应 Lyapunov 指数为 1.22, 0.16, -0.38, -0.54, -1.17, -18.85, 系统为超混沌态. 其吸引子见图 1.

电路设计者经常会遇到不确定的输出波形,一般认为是由电路产生的自激振荡和噪声干扰所致,而经研究表明,此时电路处于混沌态. 高维混沌系统具有比低维系统更加复杂的拓扑结构,相对而言增大了同步的难度. 本文整合的新六维 Duffing-Lu 超混沌系统 (1), 含有三次项、交叉项、三角函数,这是造成同步困难的原因所在. 即使实现了同步,在构造的同步方案中,控制器也非常复杂. 本文尽可能构造简单的控制器来实现系统 (1) 的同步.

### 2 六维 Duffing-Lu 超混沌系统的同步构造

以  $\dot{x} = f(t, x)$  为驱动系统,  $\dot{y} = g(t, y) + u(t, x, y)$  为响应系统,其中  $x, y \in R^n$  为状态变量,  $f, g: R^n \rightarrow R^n$  为非线性映射,  $u(t, x, y)$  为控制器,记系统误差  $e_i = y_i - x_i$ ,误差系统为

$$\dot{e} = g(t, y) - f(t, x) + u(t, x, y)$$

如果所设计控制器  $u$  使 Lyapunov 函数  $V = 0.5(e_1^2 + e_2^2 + \dots + e_n^2)$  对  $t$  的导数中仅含有二次误差量(不考虑  $x$ ),由混沌系统的有界性可知,适当放缩可使  $\dot{V} < -E^T A E$ ,其中  $A$  为对称矩阵,如果特征值均小于 0,取  $m = 0$ ,此时已经同步;如果存在负特征

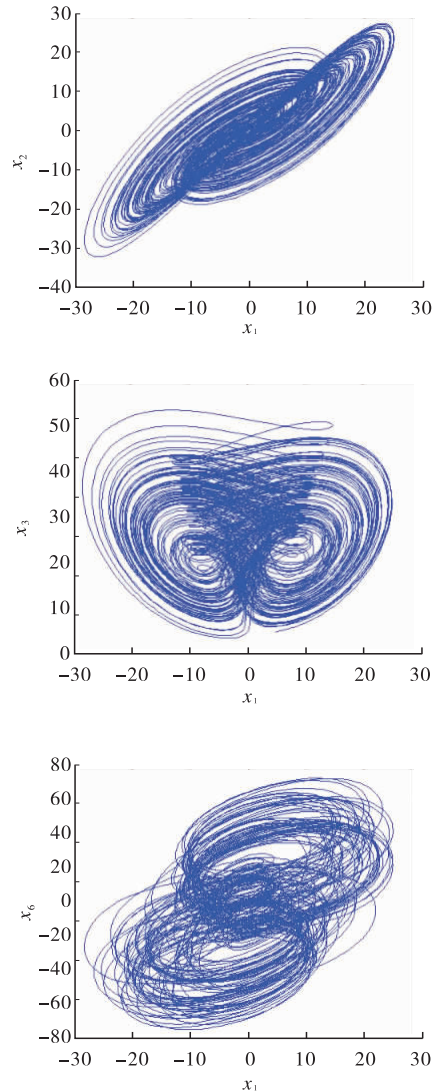


图 1 系统 (1) 的吸引子

值,取  $m$ ,使得  $m$  大于最小负特征值的绝对值,重新取  $u - me$  为控制器,此时有  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0$ ,即系统同步.

#### 2.1 非线性同步控制

以系统 (1) 作为驱动系统,响应系统为

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = a(y_2 - y_1) + by_6 + U_1 \\ \dot{y}_2 = -y_1y_3 + cy_2 + U_2 \\ \dot{y}_3 = y_1^2 - dy_3 + U_3 \\ \dot{y}_4 = y_5 + U_4 \\ \dot{y}_5 = -ey_5 - y_4^3 + f\cos y_6 + U_5 \\ \dot{y}_6 = gy_2y_3 + U_6 \end{cases} \quad (2)$$

其中,  $U_i (i = 1, 2, \dots, 6)$  为控制器,误差变为  $e_i (i = 1, 2, \dots, 6)$ ,系统 (1)(2) 的误差系统为

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = ae_2 - ae_1 + be_6 + U_1 \\ \dot{e}_2 = -e_1e_3 - e_1x_3 - x_1e_3 + ce_2 + U_2 \\ \dot{e}_3 = e_1(e_1 + x_2) - de_3 + U_3 \\ \dot{e}_4 = e_5 + U_4 \\ \dot{e}_5 = -ee_5 - (y_4^3 - x_4^3) + \\ f(\cos y_6 - \cos x_6) + U_5 \\ \dot{e}_6 = g(e_2e_3 + x_2e_3 + e_2x_3) + U_6 \end{cases} \quad (3)$$

当选取如下控制器  $U_i (i = 1, 2, \dots, 6)$  时, 误差系统在0处是稳定的, 即驱动系统①与响应系统②同步。

$$\begin{cases} U_1 = -me_1 \\ U_2 = e_1e_3 - me_2 \\ U_3 = -e_1^2 - me_3 \\ U_4 = -me_4 \\ U_5 = 3x_4e_4^2 + e_4^3 - me_5 \\ U_6 = -e_2e_3 - me_6 \end{cases} \quad (4)$$

其中  $m$  为待定常数. 选取 Lyapunov 函数

$$V = 0.5(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2 + e_5^2 + e_6^2)$$

由误差系统③和控制器④, 以及系统成混沌态时取定的系统参数和

$$\begin{aligned} & |\cos y_6 - \cos x_6| = \\ & 2 \left| \sin \frac{y_6 + x_6}{2} \sin \frac{y_6 - x_6}{2} \right| \leq |y_6 - x_6| \end{aligned}$$

可得 Lyapunov 函数的导数

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e_1\dot{e}_1 + e_2\dot{e}_2 + e_3\dot{e}_3 + e_4\dot{e}_4 + e_5\dot{e}_5 + e_6\dot{e}_6 = \\ & -ae_1^2 + ce_2^2 - de_3^2 - ee_5^2 + (a - x_3)e_1e_2 + \\ & 2x_1e_1e_3 + be_1e_6 - x_1e_2e_3 + gx_3e_2e_6 + gx_2e_3e_6 + \\ & (1 - 3x_4^2)e_4e_5 + f(\cos y_6 - \cos x_6)e_5 - \\ & m(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2 + e_5^2 + e_6^2) \leq \\ & -[36|e_1|^2 - 20|e_2|^2 + 3|e_3|^2 + 0.6|e_5|^2 - \\ & (36 + |x_3|)|e_1||e_2| - 2|x_1||e_1||e_3| - |e_1||e_6| - \\ & |x_1||e_2||e_3| - |x_3||e_2||e_6| - |x_2||e_3||e_6| - \\ & |1 - 3x_4^2||e_4||e_5| - |e_5||e_6|] - m(|e_1|^2 + \\ & |e_2|^2 + |e_3|^2 + |e_4|^2 + |e_5|^2 + |e_6|^2) \end{aligned}$$

当系统处于混沌态时, 由混沌系统的有界性可以得到

$$\begin{aligned} 36 + |x_3| &< 136 & |x_1| &< 40 & |x_2| &< 60 \\ |x_3| &< 100 & |x_5| &< 2 \\ |x_6| &< 10 & |1 - 3x_4^2| &< 8 \end{aligned}$$

从而

$$\dot{V} < -E^T A E -$$

$$m(|e_1|^2 + |e_2|^2 + |e_3|^2 + |e_4|^2 + |e_5|^2 + |e_6|^2) = -E^T(A + mI)E$$

其中,  $I$  为六阶单位矩阵, 此外,

$$E = \begin{pmatrix} |e_1| \\ |e_2| \\ |e_3| \\ |e_4| \\ |e_5| \\ |e_6| \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 36 & -68 & -40 & 0 & 0 & -0.5 \\ -68 & -20 & 0 & 0 & 0 & -50 \\ -40 & 0 & 3 & 0 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0.6 & -0.5 \\ -0.5 & -50 & -20 & 0 & -0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

用 Matlab 计算矩阵  $A$  的 6 个特征值, 分别为  $-94.4861, -3.7350, -3.4309, 4.3017, 12.7814, 104.1689$ , 取控制器中参数  $m = 95$ , 则  $A + mI$  的特征值为  $0.5139, 91.2650, 91.5691, 99.3017, 107.7814, 199.1689$ , 矩阵  $A + mI$  为正定矩阵,  $V$  是负定的, 误差系统在原点全局渐进稳定, 即系统①和系统②完全同步。

基于 Matlab 软件构建同步仿真系统, 四阶龙格-库塔法方法求解, 得出同步控制过程的模拟结果. 系统状态变量初始值取  $x(i) = 5, y(i) = -5, i = 1, 2, \dots, 6$ . 图 2 分别为系统①②状态变量的相图与同步误差曲线。

## 2.2 线性同步控制

上述控制器  $U_i$  中含有  $e_i$  且有交叉项, 而控制理论的一个基本常识是: 控制器中状态变量越少, 则控制方案越简单有效. 在实际问题中, 更多的时候系统参数是未知的, 因此笔者尝试对控制器进行简化, 并对参数进行识别. 考虑系统

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = a_0e_2 - a_0e_1 + b_0e_6 + U_1 \\ \dot{y}_2 = -e_1e_3 - e_1x_3 - x_1e_3 + c_0e_2 + U_2 \\ \dot{y}_3 = e_1(e_1 + x_2) - d_0e_3 + U_3 \\ \dot{y}_4 = e_5 + U_4 \\ \dot{y}_5 = -e_0e_5 - (y_4^3 - x_4^3) + \\ f_0(\cos y_6 - \cos x_6) + U_5 \\ \dot{y}_6 = g_0(e_2e_3 + x_2e_3 + e_2x_3) + U_6 \end{cases} \quad (5)$$

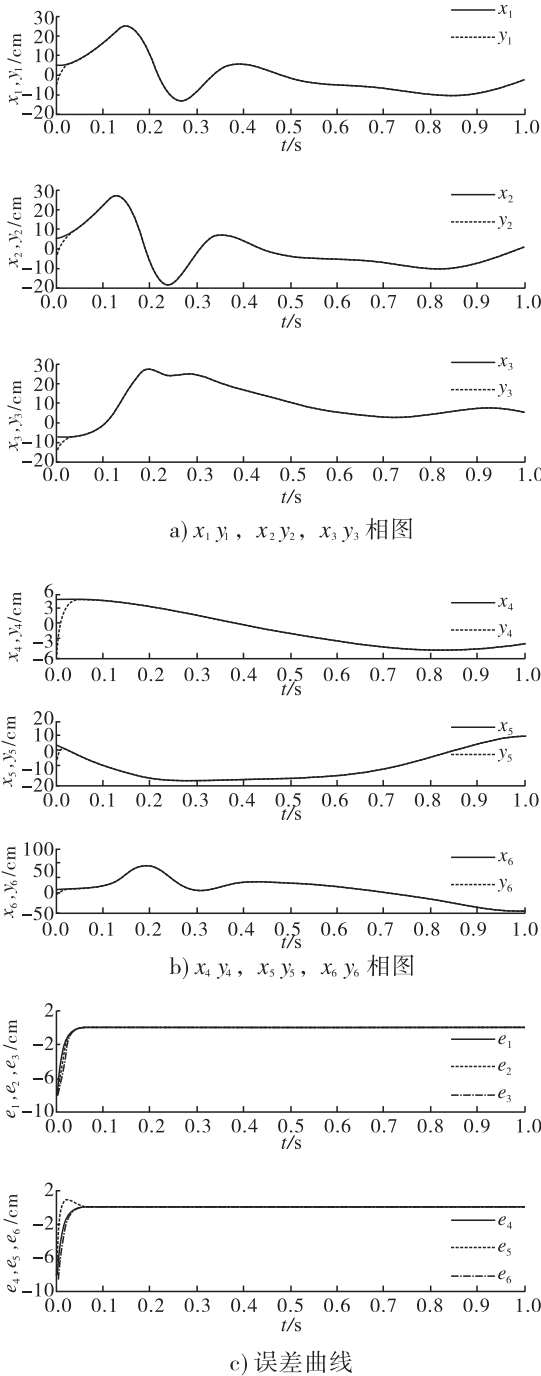


图2 系统①②状态变量的轨迹图

为相应系统,目标是由  $a_0, b_0, c_0, d_0, e_0, f_0, g_0$  来识别  $a = 36, b = 1, c = 20, d = 3, e = 0.6, f = 3, g = 1$ , 记

$$\begin{aligned} e_a &= a_0 - a & e_b &= b_0 - b & e_c &= c_0 - c \\ e_d &= d_0 - d & e_e &= e_0 - e \\ e_f &= f_0 - f & e_g &= g_0 - g \end{aligned}$$

取控制器为

$$\begin{aligned} U_1 &= -m_1 e_1 & U_2 &= -m_2 e_2 & U_3 &= -m_3 e_3 \\ U_4 &= -m_4 e_4 & U_5 &= -m_5 e_5 & U_6 &= -m_6 e_6 \end{aligned}$$

其中,  $m_i$  为待定常数. 取 Lyapunov 函数为

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 e_i^2 +$$

$$\frac{1}{2}(e_a^2 + e_b^2 + e_c^2 + e_d^2 + e_e^2 + e_f^2 + e_g^2)$$

并取

$$\begin{cases} \dot{e}_a = -e_1 e_2 - x_2 e_1 + x_1 e_1 + e_1^2 \\ \dot{e}_b = -e_1 e_6 - e_1 x_6 \\ \dot{e}_c = -e_2^2 - x_2 e_2 \\ \dot{e}_d = e_3^2 + x_3 e_3 \\ \dot{e}_e = e_5^2 + x_5 e_5 \\ \dot{e}_f = -\cos(e_6 + x_6) \\ \dot{e}_g = -e_2 e_3 e_6 - e_2 x_3 e_6 - x_2 e_3 e_6 - x_2 x_3 e_6 \end{cases} \quad (6)$$

再结合系统的有界性,类似上文推导过程可以得到  $\dot{V} < -E^T A E$ , 其中

$$A = \begin{pmatrix} 36 + m_1 & -68 & -40 & 0 & 0 & -0.5 \\ -68 & m_2 - 20 & 0 & 0 & 0 & -50 \\ -40 & 0 & 3 + m_3 & 0 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0.6 + m_5 & -0.5 \\ -0.5 & -50 & -20 & 0 & -0.5 & m_6 \end{pmatrix}$$

选取合适的  $m_i$  值,使得矩阵  $A$  为正定矩阵,  $V$  是负定的,误差系统在原点全局渐进稳定,即系统①和系统⑤完全同步. 笔者选取  $m_1 = 0, m_2 = 210, m_3 = 187, m_4 = 2, m_5 = 100, m_6 = 180$ , 即

$$U_1 = 0 \quad U_2 = -210e_2 \quad U_3 = -187e_3$$

$$U_4 = -2e_4 \quad U_5 = -100e_5 \quad U_6 = -180e_6$$

系统状态变量初始值取  $x(i) = 5, y(i) = -5, i = 1, 2, \dots, 6. a_0, b_0, c_0, d_0, e_0, f_0, g_0$  初始值均取 2. 图3分别为系统①⑤状态变量的相图与同步误差曲线,及其参数识别曲线.

由数值仿真结果可以看出,所设计的两种方案,均可在短时间内实现驱动系统与响应系统的同步. 如前文所述,在两种方案中,即使控制器比所构造同步方案简单,同样可以实现系统同步. 出现这种情况的原因是,本文设计方案仅仅是基于充分条件,而非基于充要条件;两种方法都具有一定的普适性. 在采用相同参数、相同初始值的情况下,两种方法各有优点,第一种方法实现同步的时间更短,而第二种方法控制器更为简单.

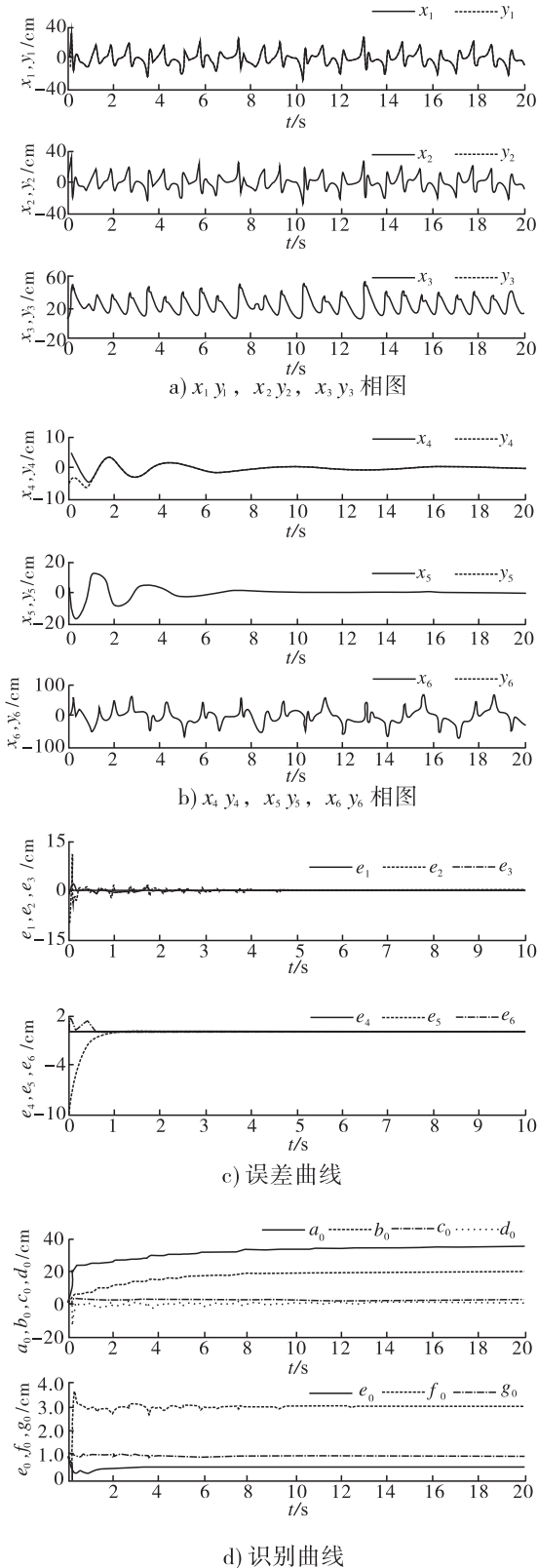


图3 系统①⑤状态变量的轨迹图

### 3 结语

本文基于混沌系统的可加性,对 Duffing 混沌系统和 Lu 混沌系统进行整合,得到一个新的六维 Duffing-Lu 超混沌系统,并对其同步问题进行了研究.在采用相同参数、相同初始值的情况下,所设计的非线性同步控制和线性同步控制两种方案均可实现系统同步,其中非线性同步控制同步时间短,线性同步控制控制器更为简单并可以实现参数识别.两种方案都具有一定的普适性,其他混沌系统同样可以通过选取合适的  $m$  值使  $A + mI$  为正定矩阵而实现同步.该同步方案对保密通信具有指导意义.设计更简单的控制器、实现混沌系统或网络同步,并给出理论推导,将是今后的研究重点.

### 参考文献:

- [1] Pecora L M, Carroll T L. Synchronization of chaotic systems[J]. Physical Review Letters, 1990, 64(8): 821.
- [2] Carroll T L, Pecora L M. Synchronizing chaotic circuits[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems, 1991, 38(4): 453.
- [3] 余飞, 王春华, 尹晋文, 等. 一个具有完全四翼形式的四维混沌[J]. 物理学报, 2012, 61(2): 020506(1-9).
- [4] 高智中, 韩新风, 章毛连. 一个新的四维超混沌系统及其电路仿真[J]. 东北师范大学学报: 自然科学版, 2012, 44(1): 77.
- [5] 魏亚东, 周爱军. 新五维超混沌系统反同步研究[J]. 舰船电子工程, 2012, 32(11): 33.
- [6] 李亚, 张正明, 陶志杰. 一个超混沌六阶蔡氏电路及其硬件实现[J]. 物理学报, 2009, 58(10): 6818.
- [7] Qi G, Chen G, Zhang Y. On a new hyperchaotic system[J]. Phys Letters A, 2007, 352: 386.
- [8] 张帆. 一种新六维 Duffing-Lu 混沌系统及其电路实现[J]. 科学技术与工程, 2013, 13(12): 3375.
- [9] 张帆, 刘剑鸣. 一种新的六维超混沌系统及其电路实现[J]. 科学技术与工程, 2013, 13(23): 6659.