第 30 卷 第 3/4 期
2015 年 8 月
郑州轻工业学院学报(自然科学版)
JOURNAL OF ZHENGZHOU UNIVERSITY OF LIGHT INDUSTRY(Natural Science)
Vol. 30 No. 3/4
Aug. 2015

文章编号:2095-476X(2015)3/4-0157-04

逐段决定复合泊松风险模型的最优分红与注资策略

岳毅蒙[1], 王欣[2], 赵锐[1]

(1. 商洛学院 数学与计算机应用学院, 陕西 商洛 726000;
2. 商洛学院 经济与管理学院, 陕西 商洛 726000)

摘要:研究了逐段决定复合泊松风险模型的最优分红和注资问题,以股东的破产时刻折现分红减去惩罚折现注资的差的期望值最大化为目标,通过求解相应的 HJB 方程,得到了对应的值函数,进而得出最优分红和注资策略是 Threshold 策略的结论,使风险模型更加符合实际,更具现实意义.

关键词:逐段决定复合泊松风险模型;HJB 方程;分红;注资

中图分类号:O211.6;F840 **文献标志码**:A **DOI**:10.3969/j.issn.2095-476X.2015.3/4.033

Optimal dividend and capital injection strategies in the piecewise-deterministic compound Poisson risk model

YUE Yi-meng[1], WANG Xin[2], ZHAO Rui[1]

(1. *Faculty of Mathematics and Computer Application*, *Shangluo University*, *Shangluo* 726000, *China*;
2. *Faculty of Economics and Management*, *Shangluo University*, *Shangluo* 726000, *China*)

Abstract: Optimal dividend payments and capital injections of the piecewise-deterministic compound Poisson risk model were discussed. The objective of an insurance business under consideration was to maximize the discounted dividend payments minus the penalized discounted capital injections. By a method to determine numerically the solution to the HJB equation, the corresponding Hamilton-Jacobi-Bellman equation was derived. And the optimal dividend and strategy was the Threshold strategy. This conclusion made the risk model have more realistic and more practical significance.

Key words: piecewise-deterministic compound Poisson risk model; HJB equation; dividend; capital injection

0 引言

逐段决定复合泊松风险模型的概念是由 J. Cai 等[1]在 2009 年首次提出的,相对于经典复合泊松模型,此模型的保费收入率依赖盈余过程,因此更加符合实际. 逐段决定复合泊松风险模型包括经典风险模型、常利率风险模型、多重阈值分红策略下的风险模型、存息利率风险模型、对偶模型等. 目前,针对这些众多特殊情形已有不同程度的讨论,文献[1]讨论了此模型在一般框架下的最优分红问题;

收稿日期:2015-01-14

基金项目:陕西省自然科学基础研究计划项目(2013JM1023);陕西省教育厅科研项目(2013JK0605);商洛学院教改项目(14JYJX103,15JYJX118);商洛学院科研项目(13SKY013)

作者简介:岳毅蒙(1984—),男,陕西省富平市人,商洛学院讲师,硕士,主要研究方向为金融数学、保险精算.

文献[2]讨论了在带交易费用的情况下,此模型的最优分红问题,但对逐段决定复合泊松风险模型本身及其一般的最优控制研究很少. 本文拟在前人研究成果[3-13]的基础上,进一步考虑在允许注资的情况下,逐段决定复合泊松风险模型的最优分红和注资问题,为保险公司的科学决策提供相应的理论指导.

1 模型构建

定义 1 设 $\{X_t, 0 \leqslant t < \infty\}$ 是定义在概率空间 $(\Omega, F, \{F\}_{t \geqslant 0}, P)$ 上的实值随机过程,若满足以下条件,则称之为逐段决定复合泊松过程(PDCP).

1) $X_0 = x$;

2) $\tau_0 = 0$, τ_i 为过程 $\{X_t\}$ 的一系列随机跳时刻,相应的跳跃次数由强度为 λ 的齐次泊松过程 $\{X_t\}$ 来表示;

3) $\{Y_i\}_{i \in N}$ 是一系列独立同分布的非负随机变量,表示两次相邻随机跳的跃度,其分布函数和密度函数分别为 $F(y)$ 和 $f(y)$,并且 $E(Y_i) = \dfrac{1}{\mu}$, $F(0) = 0$;

4) 相邻两次随机跳跃之间的过程表示为 $\varphi(t - \tau_i, X_{\tau_i}) I_{\{\tau_i \leqslant t < \tau_{i+1}\}}$,由 $\varphi(t, x) = x + \int_0^t C(\varphi(s, x)) \mathrm{d}s$ 决定,其中,$C(\cdot)$ 是局部利普希兹连续的.

在逐段决定复合泊松风险模型中,保险公司的盈余过程表示为

$$X_t = x + \int_0^t C(X_s) \mathrm{d}s - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i \qquad ①$$

其中,$\{Y_i\}_{i \in N}$ 为索赔额度,$\{N(t)\}_{t \geqslant 0}$ 为索赔次数,二者相互独立. ① 式可以等价地表示为

$$X_t = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi(t - \tau_i, X_{\tau_i}) I_{\{\tau_i \leqslant t < \tau_{i+1}\}} \qquad t < \tau$$

其中 $\tau = \inf\{t > 0 \mid X_t < 0\}$.

在 ① 式基础上考虑策略 $\pi = \{(D_t, Z_t)\}$,其中 $D = (D_t)_{t \geqslant 0}$, $Z = (Z_t)_{t \geqslant 0}$ 分别表示截至 t 时刻的累积分红与注资. 假设对于 $x \geqslant 0$, $C(x)$ 是连续的、单调不减的,且 $0 < C(x) \leqslant cx + c_0$,其中 $C(0) > 0$, c 和 c_0 为非负常数.

定义 2 我们称分红率过程 $\{D_t\}_{t \geqslant 0}$ 是可允许策略,如果 $0 \leqslant D_t \leqslant C(X_t^R) + r_0$,其中 r_0 为常数,则盈余过程变为

$$X_t^{\pi} = x + \int_0^t C(X_t^{\pi}) \mathrm{d}s - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i - D_t^{\pi} + Z_t^{\pi}$$

破产时刻定义为

$$T^{\pi} = \inf\{t \geqslant 0 \mid X_{t+}^{\pi} < 0\}$$

对应策略 π 的性能指标定义为

$$V^{\pi}(x) = E_x\left[\int_0^{T\pi} e^{-\delta t} \mathrm{d}D_t - \varphi \int_0^{T\pi} e^{-\delta t} \mathrm{d}Z_t\right]$$

其中 $\varphi > 1$ 是罚金因子. 本文考虑带有约束的分红策略,目标就是最大化值函数 $V^{\pi}(x)$,即 $V(x) = \sup\limits_{n \in \Pi} V^{\pi}(x)$,其中 Π 表示所有可行策略的集合.

2 值函数的性质

引理 1 $V(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是递增的、Lipschitz 连续的函数,且满足

$$0 \leqslant V(x) \leqslant u_0/\delta \qquad \lim_{x \to \infty} V(x) = u_0/\delta$$

对 $x \geqslant 0$ 及任意停时 τ,有如下动态规划原理成立:

$$V^{\pi}(x) = \sup_{\pi} E_x\Big[\int_{0-}^{T\pi \wedge \tau} e^{-\delta t} \mathrm{d}D_t - \varphi \int_0^{T\pi \wedge \tau} e^{-\delta t} \mathrm{d}Z_t + e^{-\delta(T\pi \wedge \tau)} V(X_{T\pi \wedge \tau}^{\pi})\Big] \qquad ②$$

令 $\varepsilon > 0$ 和任意可行策略 π,定义

$$\sigma^{\pi} = \inf\{t \geqslant 0, X_t^{\pi} \notin (x - \varepsilon, x + \varepsilon)\}$$

选择 ε 充分小,则 $\sigma^{\pi} < T^{\pi}$,令 $\tau^{\pi} = T^{\pi} \wedge h$, $h > 0$,所以当 $h \to 0$ 时 $\tau^{\pi} \to 0$,应用 Itô 公式于 $e^{-\delta \tau^{\pi}} V(X_{\tau}^{\pi})$ 得

$$e^{-\delta \tau^{\pi}} V(X_{\tau^{\pi}}^{\pi}) = V(X_{0-}^{\pi}) + \int_0^{\tau^{\pi}} e^{-\delta s}(C(x) - u_s) V'(X_{s-}^{\pi}) - \delta V(X_{s-}^{\pi}) \mathrm{d}s + \sum_{\substack{0 \leqslant s \leqslant \tau^{\pi} \\ X_s^{\pi} \neq X_{s+}^{\pi}}} e^{-\delta s}[V(X_s^{\pi}) - V(X_{s-}^{\pi})] + \sum_{\substack{0 \leqslant s \leqslant \tau^{\pi} \\ X_s^{\pi} \neq X_{s+}^{\pi}}} e^{-\delta s}[V(X_{s+}^{\pi}) - V(X_s^{\pi})] \qquad ③$$

其中 $X_s^{\pi} \neq X_{s+}^{\pi}$ 仅在注资时刻发生,所以

$$\sum_{\substack{0 \leqslant s \leqslant \tau^{\pi} \\ X_s^{\pi} \neq X_{s+}^{\pi}}} e^{-\delta s}[V(X_{s+}^{\pi}) - V(X_s^{\pi})] = \varphi \int_0^{\tau^{\pi}} e^{-\delta s} \mathrm{d}Z_s$$

当索赔到达或分红时 $X_{s-}^{\pi} \neq X_s^{\pi}$,由索赔达到引起的跳导致了

$$M(\tau^{\pi}) = M(\sigma^{\pi} \wedge h) = \sum_{\substack{0 \leqslant s \leqslant \tau^{\pi} \\ X_s^{\pi} \neq X_{s+}^{\pi}}} e^{-\delta s}[V(X_s^{\pi}) - V(X_{s-}^{\pi})] - \lambda \int_0^{\tau^{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\delta s}(V(X_{s-}^{\pi} - y) - V(X_{s-}^{\pi})) \mathrm{d}F(y) \mathrm{d}s$$

是一个初值为 0 的鞅. 而由分红导致的跳等于

$-\int_{0-}^{\tau^\pi} e^{-\delta s}\mathrm{d}D_s$,所以由②可得

$$V(x) \geqslant E_x[\int_{0-}^{\tau^\pi} e^{-\delta s}\mathrm{d}D_s - \varphi\int_0^{\tau^\pi} e^{-\delta s}\mathrm{d}Z_s + V(x) + \int_0^{\tau^\pi} e^{-\delta s}[(C(x)-u_s)V'(X_{s-}^\pi) - \delta V(X_{s-}^\pi) + \lambda\int_0^\infty V(X_{s-}^\pi - y) - V(X_{s-}^\pi)\mathrm{d}F(y)]\mathrm{d}s - \int_{0-}^{\tau^\pi} e^{-\delta s}\mathrm{d}D_s + \varphi\int_0^{\tau^\pi} e^{-\delta s}\mathrm{d}Z_s$$

等价于

$$E_x\int_0^{\tau^\pi} e^{-\delta s}[(C(x)-u_s)V'(X_{s-}^\pi) - (\lambda+\delta)V(X_{s-}^\pi) + \lambda\int_0^\infty V(X_{s-}^\pi - y)\mathrm{d}F(y)]\mathrm{d}s \leqslant 0$$

当 $T^\pi > 0$ 时,适当选择 ε 使得 $E\tau^\pi > 0$. 上式两端同时除以 $E\tau^\pi$,令 $h \to 0$,则

$$(C(x)-u)V'(x) + u - (\lambda+\delta)V(x) + \lambda\int_0^\infty V(x-y)\mathrm{d}F(y) \leqslant 0 \qquad ④$$

其中 $z \in R_+$.

另一方面可考虑这样的策略,股东首先注资 $\varepsilon > 0$,之后从 $x+\varepsilon$ 开始应用最优策略,则 $V(x) \geqslant V(x+\varepsilon) - \varphi\varepsilon$,令 $\varepsilon \to 0$,则

$$V'(x) \leqslant \varphi \qquad ⑤$$

类似于W. Fleming[14]中的讨论,④⑤式中至少有一个等号成立. 因此有以下定理成立.

定理1 函数 $V(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上几乎处处可导,且满足 HJB 方程

$$\max\{\sup_{0\leqslant r\leqslant C(x)+r_0}\{(C(x)-u)V'(x) + u - (\lambda+\delta)V(x) + \lambda\int_0^x V(x-y)\mathrm{d}F(y)\}, V'(x)-\varphi\} = 0 \qquad ⑥$$

3 最优分红和注资策略

⑥式中左边需要最大化的两项分别为 $u(1-V'(x))$ 和 $\int_0^{x+z} V(x-y)\mathrm{d}F(y)$,首先,因为 $u(1-V'(x))$ 关于 u 是线性的,最大化 $u(1-V'(x))$ 的 u^* 可以写为

$$u^*(x) = \begin{cases} 0 & V'(x) > 1 \\ u_0 & V'(x) \leqslant 1 \end{cases} \qquad ⑦$$

其次,要最大化 $\int_0^{x+z} V(x-y)\mathrm{d}F(y)$,因为 $V(x) \geqslant 0$,所以可以定义 $z^* = \inf\{z : V(x) > 0\}$,当 $x < 0$ 时,股东或者注资使公司恢复经营,或拒绝注资使公司破产. 对于前一种情况,无论注资量为多少,在 $x < 0$ 时,$V(x)$ 是线性的,即 $V(x) = V(0) + \varphi x$,由 z^* 的定义

$$z^* = \frac{V(0)}{\varphi} \qquad ⑧$$

可知 z^* 是股东愿意承担的最大赤字,故称 $-z^*$ 为最优注资下限.

定理2 策略⑦⑧所得的Threshold策略是最优的,即

$$V^{\pi^*}(x) = V(x)$$

证明 对③式两边取期望值得

$$E_x[e^{-\delta\tau^\pi}V(X_{\tau^\pi}^\pi)] - V(X_{0-}^\pi) = E_x[\int_0^{\tau^\pi} e^{-\delta s}[(C(x)-u_s)V'(X_{s-}^\pi) - (\delta+\lambda)V(X_{s-}^\pi) + \lambda\int_0^\infty V(X_{s-}^\pi - y)\mathrm{d}F(y)]\mathrm{d}s + \varphi\int_0^{\tau^\pi} e^{-\delta s}\mathrm{d}Z_s]$$

结合 HJB 方程得

$$V^\pi(x) = E_x[e^{-\delta\tau^\pi}V(X_{\tau^\pi}^\pi)] + E_x\int_0^{\tau^\pi} e^{-\delta s}u_s^*\mathrm{d}s \qquad ⑨$$

又当 $y < 0$ 时 $V^\pi(y) = 0$ 可得

$$E_x[e^{-\delta\tau^\pi}V(X_{\tau^\pi}^\pi)] = e^{-\delta\tau^\pi}V(X_{\tau^\pi}^\pi)I_{\{t<\tau\}} + e^{-\delta\tau^\pi}V(X_{\tau^\pi}^\pi)I_{\{\tau<t\}} = e^{-\delta\tau^\pi}V(X_{\tau^\pi}^\pi)I_{\{t<\tau\}}$$

由引理1及控制收敛定理知

$$\lim_{t\to\infty}E_x[e^{-\delta\tau^\pi}V(X_{\tau^\pi}^\pi)] = 0$$

对⑨式两边取极限值得

$$V^\pi(x) = E_x\int_0^{\tau^\pi} e^{-\delta s}u_s^*\mathrm{d}s = V(x)$$

4 结语

本文在逐段决定复合泊松模型的基础上考虑受限分红情况,利用随机控制理论得出值函数是相应问题HJB方程的经典解,最优分红和注资策略是Threshold策略. 这一研究结果推广了前人的结论,使风险模型更加符合实际,更具现实意义,因而可为保险公司相关策略的制订提供一定理论支持.

参考文献:

[1] Cai J, Feng R, Willmot G E. On the expectation of total discounted operating costs up to default and its applications[J]. Advances in Applied Probability, 2009(41):495.

[2] 董继国. 逐段决定复合泊松风险模型的最优控制问题[D]. 石家庄:河北师范大学,2014.

[3] Schmidli H. Optimal dividend strategies in a Cramer-Lundberg model with capital injections[J]. Insurance: Mathematcs and Economics, 2008(5): 1.

[4] Scheer N, Schmidli H. Optimal dividend strategies in a Cramer-Lundberg model with capital injections and administration costs [J]. European Actuarial Journal, 2011(1): 57.

[5] Akyildirim E, Güney I E, Rochet J C, et al. Optimal dividend policy with random interest rates [J]. Journal of Mathematical Economics, 2014, 51: 93.

[6] Hunting M, Paulsen J. Optimal dividend policies with transaction costs for a class of jump-diffusion processes[J]. Finance and Stochastics, 2013, 17(1): 73.

[7] Zhu J. Optimal dividend control for a generalized risk model with investment incomes and debit interest[J]. Scandinavian Actuarial Journal, 2013, 2013(2): 140.

[8] Eisenberg J, Schmidli H. Optimal control of capital injections by reinsurance in a diffusion approximation [J]. Blätter der DGVFM, 2009, 30(1): 1.

[9] Eisenberg J, Schmidli H. Minimising expected discounted capital injections by reinsurance in a classical risk model [J]. Scandinavian Actuarial Journal, 2011, 2011 (3): 155.

[10] Albrecher H, Thonhauser S. Optimality results for dividend problems in insurance[J]. Racsam Rev R Acad Cien Serie A Math, 2009, 103(2): 295.

[11] Shen Y, Yin C. Optimal dividend problem for a compound poisson risk model[J]. Applied Mathematics, 2014, 5 (10): 1496.

[12] Paulsen J. Optimal dividend payments and reinvestments of diffusion processes with both fixed and proportional costs[J]. Siam Journal on Control and Optimization, 2008, 47(5): 2201.

[13] Zhou M, Yuen K C. Portfolio selection by minimizing the present value of capital injection costs[J]. Astin Bulletin, 2015, 45(1): 207.

[14] Fleming W, Soner H. Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions[M]. Newyork: Springer-Verlag, 1993.

(上接第81页)

了一定的正向诱导作用,在一定程度上减少了出行的盲目拥堵等待,节约了出行成本.经河南省863软件评测中心测试,本系统具有良好的用户体验、操作便捷、功能完备、性能稳定,能够满足不同用户的多种出行导航需求.

参考文献:

[1] 孙凤梅,苏伟,冯云英.对城市交通拥挤问题分析[J].科技传播,2011(6):20.

[2] 于春全.北京市道路交通流实时动态信息系统的研究[J].交通运输系统工程与信息,2002,2(3):22.

[3] 陈洪亮,张保忠.交通路线引导系统及其技术发展跟踪[J].中国公路学报,1996,9(2):84.

[4] 李宏海,刘冬梅,王晶.日本VICS系统的发展介绍[J].交通工程,2011,8(15):107.

[5] 杨兆升,初连禹.动态路径诱导系统的研究进展[J].公路交通科技,2000,17(1):34.

[6] 王海峰,杨翊,张建栋.基于驾驶员偏好的智能导航终端开发中的路网权值标定方法研究[J].科学技术与工程,2009,9(3):628.

[7] 马越.Android的架构与应用[D].北京:中国地质大学,2008.

[8] 刘玉玮,刘爱莲,谢涛,等.基于Android平台的人员定位与监控系统的设计与实现[J].郑州轻工业学院学报:自然科学版,2012,27(6):17.

[9] 韩平阳,肖云魁,姚遵恩,等.车辆导航系统中路线寻优算法研究[J].军事交通学院学报,2010,12(2):75.

[10] 夏国平.基于Android的车载智能导航系统的研究与设计[D].成都:电子科技大学,2012.

[11] Pisinger D, Ropke S. A general heuristic for vehicle routing problems [J]. Computers & Operations Research, 2007, 34(8): 2403.