

# 基于遗传模拟退火算法的绝对值方程求解

封京梅<sup>1</sup>, 卢楠<sup>2</sup>

- (1. 陕西广播电视大学 工程管理系, 陕西 西安 710119;
2. 西安电子科技大学 数学与统计学院, 陕西 西安 710126)

**摘要:**将遗传算法的全局搜索能力和模拟退火算法的局部细化能力结合起来,设计了一种新的遗传模拟退火算法(GSAA),将该算法用于求解一类不可微的 NP-hard 问题:绝对值方程  $Ax - |x| = b$ . 数值仿真表明,该算法有效地克服了遗传算法易早熟、模拟退火算法运算效率低的缺点.

**关键词:**绝对值方程;遗传算法;模拟退火算法

**中图分类号:** O221; TP301 **文献标志码:** A **DOI:** 10.3969/j.issn.2095-476X.2015.3/4.034

## Solving absolute value equations based on genetic simulated annealing algorithm

FENG Jing-mei<sup>1</sup>, LU Nan<sup>2</sup>

- (1. Department of Project Management, Shanxi Radio TV University, Xi'an 710119, China;
2. School of Mathematics and Statistics, Xi'an Electronics Science and Technology University, Xi'an 710126, China)

**Abstract:** Combining the global search ability of genetic algorithm and the local refinement ability of simulated annealing algorithm, a new kind of genetic simulated annealing algorithm was designed. The algorithm was used for solving a class of no differentiable NP-hard problem: Absolute value equations  $Ax - |x| = b$ . Numerical experiments showed that the algorithm could effectively overcome the shortcomings that the genetic algorithm was easy to premature and simulated annealing algorithm had low efficiency of operation.

**Key words:** absolute value equation; genetic algorithm; simulated annealing algorithm

## 0 引言

绝对值方程 AVE (absolute value equations) 是指

$$Ax - |x| = b \quad (1)$$

其中,  $A \in R^{n \times n}$ ;  $x, b \in R^n$ ;  $|x|$  表示对  $x$  的各个分量取绝对值.

最初由 O. L. Mangasarian 等<sup>[1]</sup>给出了①式有唯一解、非负解、 $2^n$  个解及无解的充分条件, J. Rohn<sup>[2]</sup>

给出了①式存在无穷多解时的求解方法,但是大多数学者还是在①式存在唯一解的前提下对其算法进行更加深入的研究;文献[3-4]在无任何假设条件的情况下把 AVE 用半光滑牛顿算法转换为二阶锥互补问题,利用其研究结果,给出了 AVE 解的凸性;文献[4]利用区间算法对①式进行求解,并对其算法进行了收敛性分析;由于 AVE 的不可微性,许多学者开始尝试利用人工智能算法对其进行求解,文

收稿日期:2014-12-18

基金项目:国家自然科学基金项目(11301409);陕西广播电视大学校级项目(14D-07-B11)

作者简介:封京梅(1983—),女,河北省石家庄市人,陕西广播电视大学讲师,博士研究生,主要研究方向为最优化理论与算法.

通信作者:卢楠(1983—),女,河南省周口市人,西安电子科技大学副教授,博士,主要研究方向为对称锥优化与矩阵优化.

献[5-6]分别给出了差分进化与生物地理学混合算法、交叉熵蝙蝠算法对 AVE 进行求解,与传统的优化算法相比,效果不错,但传统优化算法对目标函数的解析性要求较高,在求解不可微这类绝对值方程时有一定的局限性。鉴于此,本文拟提出一种新的遗传模拟退火算法 GSAA(genetic and simulated annealing algorithm)。该算法对目标函数解析性无要求,可用遗传算法完成前期全局搜索,再让模拟退火算法进行局部细致搜索,以期有效提高寻找最优解的效率。

## 1 问题转化

**引理 1**<sup>[1]</sup> 对任意的  $\mathbf{b} \in R^n$ ,若  $\mathbf{A}$  的奇异值  $> 1$ ,则 AVE 存在唯一解。

本文假设矩阵  $\mathbf{A}$  的奇异值  $> 1$ ,则①式等价于无约束优化问题

$$\min f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{Ax} - |\mathbf{x}| - \mathbf{b})^T(\mathbf{Ax} - |\mathbf{x}| - \mathbf{b}) \quad (2)$$

显然,②式的解  $\mathbf{x}^* = \arg \min f(\mathbf{x})$  是①式的近似解,因为②中含有  $|\mathbf{x}|$ ,所以这是一个不可微的优化问题,传统的优化算法因为需要目标函数的导数信息而无法求解该类问题。本文在 AVE 存在唯一解的前提下,将求解①式转化为求解无约束优化问题,然后用 GSAA 求解绝对值方程,该算法的基础——模拟退火算法,已经应用于多种混合算法<sup>[7-10]</sup>。

## 2 遗传模拟退火算法设计

### 2.1 遗传算法

遗传算法<sup>[11]</sup> GA(genetic algorithm)的主要思想源于达尔文的生物进化论和孟德尔的遗传学理论,是一种求解优化问题的适应性搜索方法。但该算法在后期,适应度趋向一致,有些个体在产生后代时优势不明显,致使算法停滞不前,容易造成早熟,如果能在后期适当拉伸适应度值,将会提升算法的收敛性,克服早熟现象。

### 2.2 模拟退火算法

模拟退火算法 SAA(simulated annealing algorithm)<sup>[12]</sup>的基本思想是把优化问题的求解过程与统计热力学中的热平衡问题相结合,其物理背景是固体退火过程的物理图像和统计性质,固体退火是先将固体加热至熔化,然后慢慢冷却,使之凝固成规整晶体的热力学过程,从统计物理学的观点来看,随着温度的降低,物质的能量将逐渐趋近于一个较低的状态,并最终达到某种平衡。其中主要包

括 4 个基本概念:

1) 目标函数。即待优化的函数,通常是对目标函数取最小值进行优化。

2) 温度。对于退火算法来说,这是一个重要的参数,它随着算法的迭代次数而下降,以模拟固体退火过程中的降温过程。温度一方面用于限制 SAA 产生的新解与当前解之间的距离,即搜索范围;另一方面初始温度较高时,SAA 接受较差解的概率也相对较高,这样 SAA 就有更大的机会跳出局部最优解,且温度下降速度较平稳时,SAA 搜索范围越大,找到最优解的概率就越大。

3) 退火进度表。是指温度随着算法迭代次数增加的速度下降,退火过程越慢,SAA 找到全局最优解的概率越大,但是运行时间会增加,因此把握好温度下降的速度是关键。

4) Metropolis 准则。是指 SAA 接受新解的概率,本文采用的是 Boltzmann 概率分布,即

$$P(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}') = \begin{cases} 1 & f(\mathbf{x}') < f(\mathbf{x}) \\ \frac{1}{1 + \exp\left[\frac{f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x})}{T}\right]} & f(\mathbf{x}') \geq f(\mathbf{x}) \end{cases}$$

其中, $\mathbf{x}$  为当前解, $\mathbf{x}'$  为新解, $f(\cdot)$  表示解得目标函数值, $T$  为温度。

### 2.3 GSAA

GSAA 的主要思想是先利用 GA 进行全局搜索,使种群靠近最优点附近后再利用 SAA 进行局部细致寻优,两种算法交替使用直至满足终止条件,算法步骤如下。

**步骤 1** 设置 GA 参数:种群规模  $P$ ,进化代数  $M$ ,交叉概率  $P_c$ ,变异概率  $P_m$ ;设置 SAA 参数:退火初始温度  $T_0$ ,温度冷却系数  $k$ ,终止温度  $T_{\text{end}}$ 。

**步骤 2** 利用 GA 初始化种群。

**步骤 3** 计算个体的适应度值,然后进行选择、交叉、变异等操作。

**步骤 4** 判断是否满足终止条件,如果  $|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}| \leq \varepsilon$ ,输出当前染色体,如果否,则转到步骤 5。

**步骤 5** 以当前所得种群为初始种群,对每个个体进行一次 SAA 局部寻优,如果满足终止条件则停止迭代,得到最优点  $\mathbf{x}^k$ ;否则转到步骤 3。

## 3 算法仿真与分析

为了测试 GSAA 混合算法求解方程①的性能,测试如下三个算例( $\mathbf{A}$  的奇异值均大于 1,都能保证

有唯一解):

算例1 考虑如下 AVE,其中

$$A = \begin{bmatrix} 50 & 2 \\ 3 & 60 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -49 \\ 56 \end{bmatrix}$$

算例2 考虑如下 AVE,其中

$$A = \begin{bmatrix} 100 & 1 & 1 \\ 0 & 200 & 2 \\ 1 & 1 & 300 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 101 \\ 201 \\ 301 \end{bmatrix}$$

算例3 考虑如下 AVE,其中

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 11 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 12 & 1 \\ 1 & 7 & 0 & 13 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 12 \\ 15 \\ 14 \\ 20 \end{bmatrix}$$

构造目标函数

$$\min f(x) = \frac{1}{2} (Ax - |x| - b)^T (Ax - |x| - b)$$

GSAA 算法选择参数如下:群体规模  $p = 5$ , 进化代数  $maxgen = 30$ , 交叉概率  $p_c = 0.6$ , 变异概率  $p_m = 0.1$ , 退火初始温度  $T_0 = 100$ ,  $k = 0.8$ ,  $T_{end} = 1$ .

连续用基本算法 GA, SAA, GSAA 求解算例1—3 各 30 次, 表 1 列出了各种算法的寻优结果, 由数

据对比可以看出, GA 容易陷入局部收敛, 无法跳出; SAA 运算效率低、寻优效率低、运行时间长; 而 GSAA 能有效、快速地收敛到问题的全局最优解, 优势明显.

图 1—图 3 给出终止代数 30 的条件下, SAA, GA, GSAA 三种算法求解算例 1—3 时, 每次迭代的最佳函数值随着迭代次数增加的收敛情况. 从图 1—3 可以看出, 在迭代初期由于退火温度比较高, SAA 接受目标函数值比当前解差的新解的概率相对较高, 因此当前解的目标函数值的变化和跳动较为频繁, 到迭代后期, 逐渐平稳下来; GA 容易陷入局部最优无法跳出; GSAA 的收敛速度与整体寻优上明显优于其他两种算法.

为了测试 GSAA 混合算法求解方程①的有效性, 可以求解如下随机生成的绝对值方程, 矩阵  $A$  (奇异值 1) 和向量  $b$  由如下 Matlab R2010a<sup>[13]</sup> 程序生成:

```
rand('state',0);
R = rand(n, n);
b = 100 * rand(n, 1);
A = R' * R + n * eye(n);
```

表 1 三种算法的寻优结果

算例	算法	时间/s	平均最优解	最优解
1	GA	1.789 0	(1.086 1, 0.996 5)	(1.000 0, 1.000 0)
	SAA	10.121 0	(1.008 91, 0.990 5)	(1.000 0, 1.000 0)
	GSAA	2.265 0	(1.000 0, 1.000 0)	(1.000 0, 1.000 0)
2	GA	2.331 0	(1.073 2, 1.221 0, 1.201 8)	(1.000 03, 0.977 1, 1.002 7)
	SAA	12.562 0	(1.045 6, 1.203 1, 1.251 8)	(1.000 1, 1.001 21, 0.999 7)
	GSAA	3.862 4	(1.000 0, 1.000 0, 1.000 0)	(1.000 0, 1.000 0, 1.000 0)
3	GA	2.566 0	(0.973 3, 1.043 8, 1.008 0, 0.937 5)	(1.025 0, 1.012 0, 0.981 7, 0.940 7)
	SAA	15.782 0	(0.974 3, 1.156 3, 1.253 0, 0.979 5)	(0.971 0, 1.127 8, 1.142 1, 0.927 9)
	GSAA	6.231 1	(0.999 6, 1.000 9, 1.000 3, 0.999 9)	(1.000 0, 1.000 0, 1.000 0, 1.000 0)

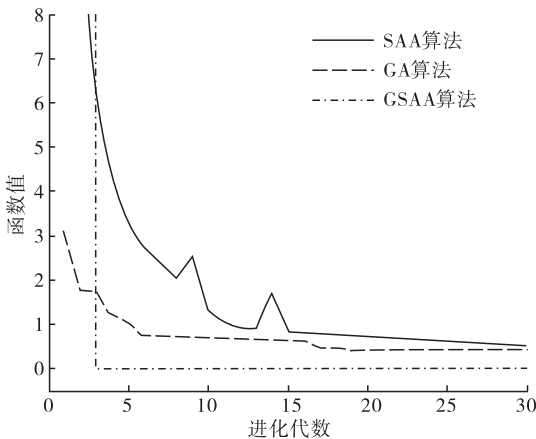


图 1 三种算法求解算例 1

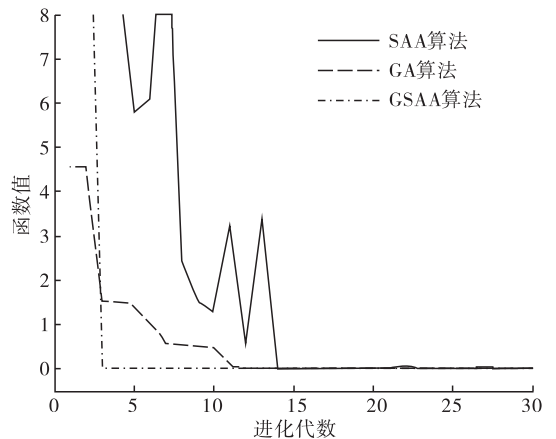


图 2 三种算法求解算例 2

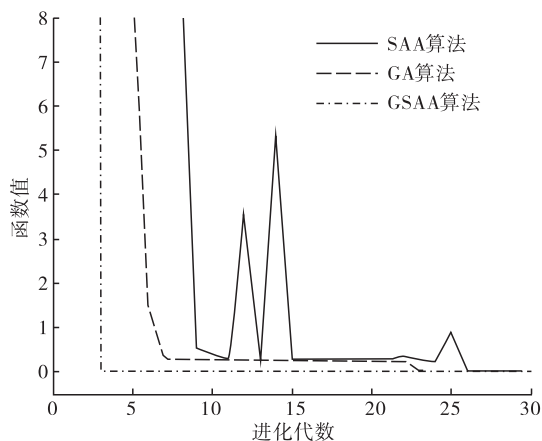


图3 三种算法求解算例3

给定矩阵的阶数  $n$ , 调用本文算法, 可以快速得到 AVE 的最优解或近似最优解。

## 4 结语

考虑到绝对值方程  $Ax - |x| = b$  是一类不可微的 NP-hard 问题, 本文设计了一种基于 GSAA 的算法, 该算法充分利用 GA 极强的全局平行搜索能力, 以及 SAA 极好的局部搜索能力, 同时有效地避开了 GA 容易陷入早熟、SAA 运行效率低的局限, 数值仿真结果表明, 较之传统算法, GSAA 混合算法的运算效率、运算精度都得到了明显提高。

## 参考文献:

- [1] Mangasarian O L, Meyer R R. Absolute value equations [J]. Linear Algebra and Its Application, 2006, 419 (5): 359.
- [2] Rohn J. An algorithm for computing all solutions of an absolute value equation [J]. Optimization Letters, 2012, 6 (5): 851.
- [3] Hu S L, Huang Z H. A note on absolute value equations [J]. Optimization Letters, 2009, 4 (3): 417.
- [4] Hu S L, Huang Z H, Zhang Q. A generalized Newton method for absolute value equation associated with second order cones [J]. Computational Optimization and Applications, 2011, 235: 1490.
- [5] Yong L Q, Liu S Y, Feng Q X, et al. Hybrid differential evolution with biogeography-based optimization for absolute value equation [J]. Journal of Information & Computational Science, 2013, 10 (8): 2417.
- [6] 李国成, 肖庆宪. 绝对值方程的交叉熵蝙蝠算法求解 [J]. 计算机应用研究, 2014, 28 (10): 2966.
- [7] 刘佳, 梁秋丽, 王书青, 等. 基于模拟退火算法的萤火虫群优化算法研究 [J]. 计算机仿真, 2014, 31 (5): 284.
- [8] 刘波, 孟培生. 采用基于模拟退火的蚁群算法求解旅行商问题 [J]. 华中科技大学学报: 自然科学版, 2009, 37 (11): 26.
- [9] 卢莉蓉, 行小帅, 霍冰鹏. 基于免疫规划的模拟退火算法 [J]. 计算机工程, 2007, 33 (10): 196.
- [10] 梁衡, 刘新新, 郑远攀, 等. 基于退火遗传算法的无线传感器网络路由优化研究 [J]. 郑州轻工业学院学报: 自然科学版, 2012, 27 (6): 93.
- [11] 梁艳春, 吴春国, 时小虎, 等. 群智能优化算法理论与应用 [M]. 北京: 北京科学技术出版社, 2009: 1-33.
- [12] 陈宝林. 最优化理论与算法 [M]. 2 版. 北京: 清华大学出版社, 2005: 349-359.
- [13] 史峰, 王辉, 胡斐, 等. MATLAB 智能算法 30 个案例分析 [M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2011.