

分数阶复杂网络系统的混沌同步研究

毛北行, 程春蕊

(郑州航空工业管理学院 数理系, 河南 郑州 450015)

摘要:基于 Lyapunov 稳定性理论和分数阶微积分相关理论,采用驱动-响应法,研究了一类分数阶复杂网络系统的混沌同步问题,给出了分数阶复杂网络及分数阶时滞复杂网络系统实现混沌同步的充分性条件.这表明在一定条件下,主从系统可以实现混沌同步.仿真结果表明了该方法的正确性.

关键词:混沌同步;分数阶复杂网络系统;驱动-响应法

中图分类号: O482.4 **文献标志码:** A **DOI:** 10.3969/j.issn.2095-476X.2015.5/6.028

Chaos synchronization of fractional order complex network system

MAO Bei-xing, CHENG Chun-rui

(Department of Mathematics and Physics, Zhengzhou Institute of Aeronautical Industry Management, Zhengzhou 450015, China)

Abstract: The chaos synchronization problem of fractional order complex network system was studied through drive-responsive approach on Lyapunov stability theory and fractional order calculus relevant theory. The sufficient conditions for fractional order complex network and its time-delayed system realizing chaos synchronization were given, which suggested that master-slave system could realize the chaos synchronization under certain conditions. Numerical simulations example of chaotic system verified the correctness of the proposed method.

Key words: chaos synchronization; fractional order complex network system; drive-responsive approach

0 引言

作为控制论的一个新概念,混沌同步自提出以来已取得了丰富的研究成果^[1-7].近年来,分数阶系统因能更准确地描述自然界中的一些物理特性而成为研究热点:文献[8]研究了一类带有未知对称控制增益的不确定分数阶混沌系统的自适应模糊同步控制;文献[9]研究了一类不确定分数阶时滞系统的鲁棒稳定性判定准则;文献[10]研究了不确定分数阶混沌系统的滑模自适应同步控制问题,所设计的控制器结构简单且控制代价小;文献[11]基

于 TS 模型研究了一类分数阶系统的混沌同步问题.但是关于分数阶复杂网络系统的相关结果还十分少见.本文拟研究一类分数阶复杂网络的混沌同步问题,基于 Lyapunov 稳定性理论和分数阶微积分的相关理论,给出分数阶复杂网络及分数阶时滞复杂网络系统实现混沌同步的充分性条件,以期说明在一定的条件下主、从系统可以实现混沌同步.

1 分数阶复杂网络系统的混沌同步

定义 1^[12] Caputo 分数阶导数定义为

收稿日期:2015-05-13

基金项目:国家自然科学基金数学天元基金项目(11226337);航空基金项目(2013ZD55006);河南省高等学校青年骨干教师资助计划项目(2013GGJS-142);河南省基础与前沿技术研究计划项目(142300410410);河南省高等学校重点科研项目(15B110011);郑州航空工业管理学院青年基金项目(2014113002)

作者简介:毛北行(1976—),男,河南省洛阳市人,郑州航空工业管理学院副教授,主要研究方向为复杂网络与混沌同步.

$$\begin{aligned}
 {}_c D_{t_0,t}^\alpha &= D_{t_0,t}^{-(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \mathbf{x}(t) = \\
 &\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} \mathbf{x}^{(n)}(\tau) d\tau \\
 n-1 &< \alpha < n \in \mathbb{Z}^+
 \end{aligned}$$

考虑如下分数阶复杂网络系统:

$$\begin{aligned}
 D^\alpha \mathbf{x}_i(t) &= f(\mathbf{x}_i) + c \sum_{j=1}^N a_{ij}(t) \mathbf{x}_j(t) \\
 i &= 1, 2, \dots, N \quad \text{①}
 \end{aligned}$$

其中, $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iN})^T \in \mathbb{R}^N$ 是网络中节点 i 的状态向量; $f_i: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ 为光滑的非线性向量函数; c 为耦合强度; $\mathbf{A}(t) = (a_{ij}(t))_{N \times N}$ 为外部耦合矩阵, 表征网络的拓扑结构, 在 t 时刻满足 $a_{ij}(t) = a_{ij} \neq 0$, 表示在 t 时刻从节点 i 到 j 有一条耦合强度为 $a_{ij} = a_{ij}(t)$ 的连接边, 并且在任何时候满足 $a_{ij}(t) = -\sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij}(t)$, $i = 1, 2, \dots, N$; D^α 是 Caputo 导数 $D_{0,t}^\alpha$. 以上述系统作为驱动系统, 其对应的响应系统设计为

$$D^\alpha \mathbf{y}_i(t) = f(\mathbf{y}_i) + c \sum_{j=1}^N a_{ij}(t) \mathbf{y}_j(t) + \mathbf{u}_i(t) \quad \text{②}$$

定义系统误差 $\mathbf{e}_i(t) = \mathbf{y}_i(t) - \mathbf{x}_i(t)$, ②式减去

①式得到误差系统方程为

$$\begin{aligned}
 D^\alpha \mathbf{e}_i(t) &= f(\mathbf{y}_i(t)) - f(\mathbf{x}_i(t)) + \\
 &c \sum_{j=1}^N a_{ij}(t) \mathbf{e}_j(t) + \mathbf{u}_i(t)
 \end{aligned}$$

假设 1 非线性函数 $f(\cdot)$ 满足 $\|f(\mathbf{y}_i(t)) - f(\mathbf{x}_i(t))\| \leq l \|\mathbf{y}_i(t) - \mathbf{x}_i(t)\|$, l 为大于零的常数.

引理 1^[13] 对于一般的分数阶自治非线性微分方程 $D_t^\alpha \mathbf{x}(t) = f(\mathbf{x}(t))$, 当系统的阶数 $0 < \alpha \leq 1$ 时, 如果存在实对称正定矩阵 \mathbf{P} , 使得 $\mathbf{J}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}^T(t) \mathbf{P} \frac{d^\alpha \mathbf{x}(t)}{dt^\alpha} < 0$, 则上述分数阶系统渐近稳定.

定理 1 在假设 1 成立的前提下, 选取控制器 $\mathbf{u}_i(t) = -k\mathbf{e}_i(t)$, 如果满足不等式 $(l-k)\mathbf{I} + c(\mathbf{I} \otimes \mathbf{A}) < 0$, 则分数阶复杂网络系统的主、从系统 ① 与 ② 是混沌同步的.

证明

$$\begin{aligned}
 \mathbf{J}(\mathbf{e}_i(t)) &= \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i(t) \mathbf{P} \frac{d^\alpha \mathbf{e}_i(t)}{dt^\alpha} = \\
 &\sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i(t) \mathbf{P} [f(\mathbf{y}_i(t)) - f(\mathbf{x}_i(t)) + \\
 &c \sum_{j=1}^N a_{ij}(t) \mathbf{e}_j(t) + \mathbf{u}_i(t)]
 \end{aligned}$$

因为

$$\mathbf{e}_i^T(t) \mathbf{P} \left[c \sum_{j=1}^N a_{ij}(t) \mathbf{e}_j(t) \right] \leq \mathbf{e}_i^T(t) \mathbf{P} c (\mathbf{I} \otimes \mathbf{A}) \mathbf{e}_i(t)$$

其中 \otimes 表示直积, 所以很容易得到下述不等式成立:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{J}(\mathbf{e}_i(t)) &\leq \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i(t) \mathbf{P} [(l-k)\mathbf{I} + \\
 &c(\mathbf{I} \otimes \mathbf{A})] \mathbf{e}_i(t) < 0
 \end{aligned}$$

根据引理 1, 很容易证得定理 1.

2 分数阶时滞复杂网络系统的混沌同步

以下考虑分数阶时滞复杂网络系统

$$\begin{aligned}
 D^\alpha \mathbf{x}_i(t) &= f(\mathbf{x}_i(t), \mathbf{x}_i(t-\tau)) + \\
 c_1 \sum_{j=1}^N a_{ij}(t) \mathbf{x}_j(t) &+ c_2 \sum_{j=1}^N b_{ij}(t) \mathbf{x}_j(t-\tau) \quad \text{③}
 \end{aligned}$$

其中, $\mathbf{A}(t) = (a_{ij}(t))_{N \times N}$ 和 $\mathbf{B}(t) = (b_{ij}(t))_{N \times N}$ 为外部耦合矩阵, 表征网络的拓扑结构. 以上述系统作为驱动系统, 其对应的响应系统设计为

$$\begin{aligned}
 D^\alpha \mathbf{y}_i(t) &= f(\mathbf{y}_i(t), \mathbf{y}_i(t-\tau)) + c_1 \sum_{j=1}^N a_{ij}(t) \mathbf{y}_j(t) + \\
 c_2 \sum_{j=1}^N b_{ij}(t) \mathbf{y}_j(t-\tau) &+ \mathbf{u}_i(t) \quad \text{④}
 \end{aligned}$$

定义系统误差 $\mathbf{e}_i(t) = \mathbf{y}_i(t) - \mathbf{x}_i(t)$, ④式减去

③式得到误差系统方程为

$$\begin{aligned}
 D^\alpha \mathbf{e}_i(t) &= f(\mathbf{y}_i(t), \mathbf{y}_i(t-\tau)) - \\
 f(\mathbf{x}_i(t), \mathbf{x}_i(t-\tau)) &+ c_1 \sum_{j=1}^N a_{ij}(t) \mathbf{e}_j(t) + \\
 c_2 \sum_{j=1}^N b_{ij}(t) \mathbf{e}_j(t-\tau) &+ \mathbf{u}_i(t)
 \end{aligned}$$

假设 2 非线性函数 $f(\cdot)$ 满足

$$\|f(\mathbf{y}_i(t), \mathbf{y}_i(t-\tau)) - f(\mathbf{x}_i(t), \mathbf{x}_i(t-\tau))\| \leq \gamma \|\mathbf{y}_i(t) - \mathbf{x}_i(t)\| + \eta \|\mathbf{y}_i(t-\tau) - \mathbf{x}_i(t-\tau)\|$$

引理 2^[14] 分数阶时滞系统 $D^\alpha \mathbf{x}(t) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau))$, 如果有正定矩阵 \mathbf{P} 和半正定矩阵 \mathbf{Q} 满足

$$\begin{aligned}
 \mathbf{J}(t) &= \mathbf{x}^T(t) \mathbf{P} D^\alpha \mathbf{x}(t) + \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) - \\
 \mathbf{x}^T(t-\tau) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t-\tau) &\leq 0
 \end{aligned}$$

则上述分数阶时滞系统是 Lyapunov 稳定的.

定理 2 在假设 2 成立的前提下, 选取控制器 $\mathbf{u}_i(t) = -k\mathbf{e}_i(t)$, 如果存在正定矩阵 \mathbf{P} 和半正定矩阵 \mathbf{Q} 满足矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}[(\gamma-k)\mathbf{I} + c_1(\mathbf{I} \otimes \mathbf{A})] + \mathbf{Q} & 1/2\mathbf{P}[\eta\mathbf{I} + c_2\mathbf{B}] \\ 1/2\mathbf{P}[\eta\mathbf{I} + c_2\mathbf{B}] & -\mathbf{Q} \end{bmatrix} < 0$$

则分数阶时滞复杂网络系统的主从系统 ③ 与 ④ 是混沌同步的.

证明 根据引理 2 可知

$$J(t) = \sum_{i=1}^N [e_i^T(t)PD^\alpha e_i(t) + e_i(t)^T Qe_i(t) - e_i^T(t-\tau)Qe_i(t-\tau)] \leq \sum_{i=1}^N e_i^T(t)P[\gamma e_i(t) + \eta e_i(t-\tau) +$$

$$c_1 \sum_{j=1}^N a_{ij}(t)e_j(t) + c_2 \sum_{j=1}^N b_{ij}(t)e_j(t-\tau) + u_i(t)] +$$

$$\sum_{i=1}^N [e_i(t)^T Qe_i(t) - e_i^T(t-\tau)Qe_i(t-\tau)]$$

因为

$$\sum_{i=1}^N e_i^T(t)P[\gamma e_i(t) + \eta e_i(t-\tau) +$$

$$c_1 \sum_{j=1}^N a_{ij}(t)e_j(t) + u_i(t)] + \sum_{i=1}^N e_i(t)^T Qe_i(t) \leq e^T(t) \{P[(\gamma - k)I + c_1(I \otimes A)] + Q\} e(t)$$

又因为

$$\sum_{i=1}^N e_i^T(t)P[\eta e_i(t-\tau) + c_2 \sum_{j=1}^N a_{ij}(t)e_j(t-\tau)] \leq$$

$$e^T(t)P[\eta I + c_2 A]e(t-\tau)$$

其中 $A = (a_{ij})$. 所以

$$J(t) \leq \begin{bmatrix} e(t) \\ e(t-\tau) \end{bmatrix}^T \cdot$$

$$\begin{bmatrix} P[(\gamma - k)I + c_1(I \otimes A)] + Q & 1/2P[\eta I + c_2 B] \\ 1/2P[\eta I + c_2 B] & -Q \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} e(t) \\ e(t-\tau) \end{bmatrix} < 0$$

其中

$$e(t) = [\|e_1(t)\|, \|e_2(t)\|, \dots, \|e_N(t)\|]^T$$

$$e(t-\tau) =$$

$$[\|e_1(t-\tau)\|, \|e_2(t-\tau)\|, \dots, \|e_N(t-\tau)\|]^T$$

3 数值算例

定理 1 假设复杂网络含有 3 个节点,第 i 个节点是如下分数阶 Lü 系统:

$$\begin{cases} D^\alpha x_{i1} = 36(x_{i2} - x_{i1}) \\ D^\alpha x_{i2} = -x_{i1}x_{i3} + 20x_{i2} \\ D^\alpha x_{i3} = -3x_{i3} + x_{i1}x_{i2} \end{cases}$$

当 $\alpha > 0.9156$ 时表现出混沌行为,混沌吸引子如图 1 所示.

定理 1 中 $c = 0.01, l = 0.68, A = \text{diag}(3, 5, 2)$,

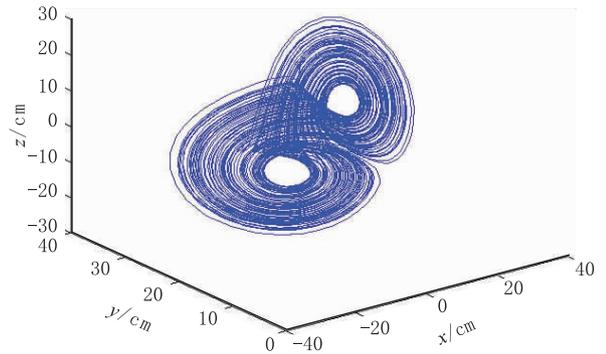


图 1 分数阶 Lü 系统的混沌吸引子

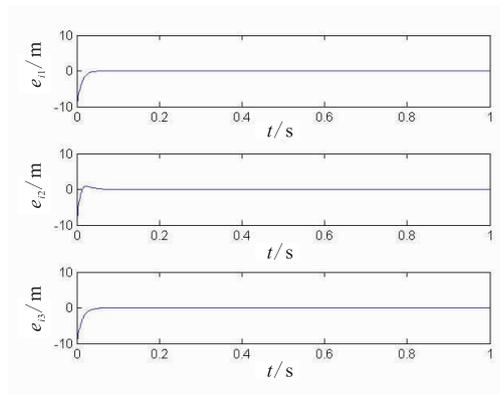


图 2 定理 1 中系统的同步误差

选取适当的 k 满足不等式 $(l - k)I + c(I \otimes A) < 0$, 则定理 1 成立,其对应的系统误差曲线如图 2 所示.

定理 2 假设复杂网络含有 3 个节点,第 i 个节点是如下时滞 Lorenz 系统:

$$\begin{cases} D^\alpha x_{i1} = -ax_{i1} + ax_{i2} \\ D^\alpha x_{i2} = cx_{i1} + (d - 1)x_{i2} - x_{i1}x_{i3} + dx_{i2}(t - \tau) \\ D^\alpha x_{i3} = -bx_{i3} + x_{i1}x_{i2} \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} -4\text{sint} & \text{sint} & \text{sint} \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -2\text{sint} & \text{sint} & 0 \\ 2 & -\text{sint} - 2 & \text{sint} \\ 0 & \text{sint} & -2\text{sint} \end{bmatrix}$$

$a = 10, b = 3/8, c = 28, \alpha = 0.97, \tau = 0.5$ 时系统进入混沌状态,系统的混沌吸引子如图 3 所示,耦合强度 $c_1 = c_2 = 0.01, \gamma = 1.5, \eta = 2$,其对应的系统误差曲线如图 4 所示.

4 结论

本文基于 Lyapunov 稳定性理论和分数阶微积分的相关理论,采用驱动 - 响应法,研究了分数阶

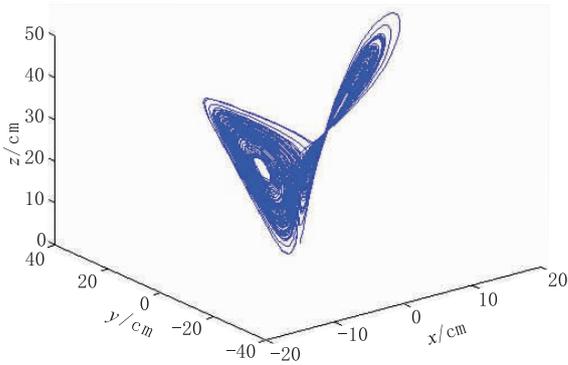


图3 分数阶 Lorenz 系统的混沌吸引子

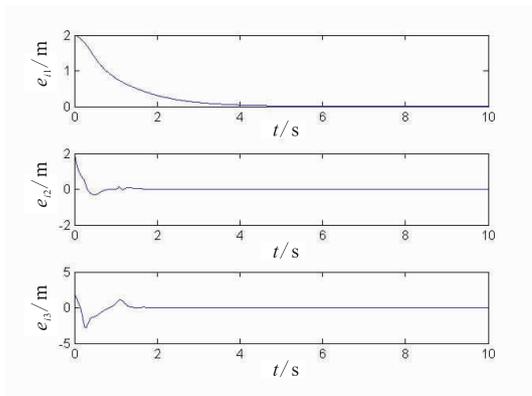


图4 定理2中系统的同步误差

复杂网络系统的混沌同步问题,给出了分数阶复杂网络以及分数阶时滞复杂网络系统实现混沌同步的充分性条件.研究表明:在一定的条件下主、从系统可以实现混沌同步.仿真结果证明了本方法的正确性.

参考文献:

[1] 徐争辉,刘友金,谭文,等.一个对称分数阶经济系统混沌特性分析[J].系统工程理论与实践,2014,34(5):1237.

- [2] 郝建红,宾虹,姜苏娜,等.分数阶线性系统稳定理论在混沌同步中的简单应用[J].河北师范大学学报:自然版,2014,38(5):469.
- [3] 潘光,魏静.一种分数阶混沌系统同步的只适应滑模控制器设计[J].物理学报,2015,64(4):5051.
- [4] 张云雷,吴超然.基于反馈控制的分数阶时滞神经网络的同步[J].重庆工商大学学报:自然版,2014,31(12):49.
- [5] 韩敏,张雅美,张檬.具有双重时滞的时变耦合复杂网络的牵制外同步[J].物理学报,2015,64(7):5061.
- [6] Lü L, Li G, Guo Y. Generalized chaos synchronization of a weighted complex network with different nodes[J]. Cjnn Phys B, 2010, 19(8):5071.
- [7] Mei J, Jiang M H, Wang J. Finite-time structure identification and synchronization of drive-response systems with uncertain parameter[J]. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 2013(18):999.
- [8] 刘恒,李生刚,孙业国,等.带有未知非对称控制增益的不确定分数阶混沌系统的自适应模糊同步控制[J].物理学报,2015,64(7):5031.
- [9] 卫一恒,朱敏,彭程,等.不确定分数阶时滞系统的鲁棒稳定性判定准则[J].控制与决策,2014,29(3):511.
- [10] 余名哲,张友安.一类不确定分数阶混沌系统的滑模自适应同步[J].北京航空航天大学学报,2014,40(9):1276.
- [11] 钟启龙,邵永辉,郑永爱.基于TS模型的分数阶混沌系统同步[J].扬州大学学报:自然版,2012,17(2):46.
- [12] Podlubny. Fractional Differential Equation[M]. San Diego, CA: Academic Press, 1999.
- [13] 胡建兵,赵灵冬.分数阶系统稳定性理论与控制研究[J].物理学报,2013,62(24):5041.
- [14] 赵灵冬.分数阶非线性时滞系统的稳定性理论及控制研究[D].上海:东华大学,2014.