

一种基于投影法的直觉模糊多属性群决策方法

李东辉¹, 孙贵玲²

(1. 郑州信息科技职业学院 机电工程系, 河南 郑州 450046;

2. 黄河科技学院 信息工程学院, 河南 郑州 450006)

摘要:在直觉模糊环境下提出了一种基于投影法和加权记分函数的多属性群决策方法. 在该方法中, 根据各个决策在理想决策上的投影确定各专家的权重, 将群决策问题转化为决策问题, 利用加权记分函数确定各属性权重进而得到最优方案. 通过具体实例说明了该算法的有效性和可行性.

关键词:多属性群决策; 直觉模糊集; 投影法; 加权记分函数

中图分类号: O159 **文献标志码:** A **DOI:** 10.3969/j.issn.2095-476X.2015.5/6.033

An intuitionistic fuzzy multiple attribute group decision making method based on projection method

LI Dong-hui¹, SUN Gui-ling²

(1. Department of Mechanical and Electrical Engineering, Zhengzhou Vocational University of Information and Technology, Zhengzhou 450046, China;

2. College of Information Engineering, Huanghe Science and Technology College, Zhengzhou 450006, China)

Abstract: A new multiple attribute group decision making method based on projection and weight score function under the intuitionistic environment was presented. In this method, according to the projection of the various decisions on the ideal decision, the weight of each expert can be obtained. Then the group decision making problem was converted to decision making problem. The weighted score function was used to determine the attribute weights and the optimal solution was given. An illustrative example was given to verify the developed method and demonstrate its practicality and effectiveness.

Key words: multiple attribute group decision making; intuitionistic fuzzy set; projection method; weight score function

0 引言

自 K. Atanassov^[1]首次提出直觉模糊集理论以来, 该理论已经被广泛应用于现代社会的各个领域. H. Bustince 等^[2]指出, 直觉模糊集等同于 W. L. Gau 等^[3]提出的 Vague 集, 是 Zadeh 模糊集的推广.

多属性决策要解决的主要问题就是对备选方案的排序和择优. 经典的多属性决策均是在确定的或明确的条件下进行的, 即认为属性、约束、偏好等信息都是确定的, 至少是明确的. 但是在现实生活中, 受客观环境的复杂性、决策者的知识结构和专业水平, 以及时间等诸多因素的影响, 一个决策者往往

收稿日期: 2015-08-03

基金项目: 河南省教育厅自然科学研究项目(15B110004)

作者简介: 李东辉(1981—), 男, 河南省夏邑县人, 郑州信息科技职业学院讲师, 硕士, 主要研究方向为基础数学.

通信作者: 孙贵玲(1981—), 女, 河南省濮阳市人, 黄河科技学院副教授, 主要研究方向为模糊决策、偏微分方程.

不能提供对决策方案精确的偏好信息,这就需要若干个专家对决策方案提供偏好信息;同时,决策的最后结果要有决策群体通过协商和妥协来完成.这就是多属性群决策.

1977年,S. M. Bass等^[4]提出的模糊多属性决策方法被普遍认为是模糊多属性决策的经典方法.从1980年代起,许多学者开始关注模糊多属性群决策,有多种方法被提出.2013年,李荣均^[5]在模糊集的基础上建立了多属性群决策的基本理论,总结了一些模糊多属性群决策方法.孙丽等^[6]结合直觉模糊算子提出了一种基于Vague集的多属性群决策排序方法.当属性值为直觉模糊集,属性权重不确定也为直觉模糊集时,D. F. Li^[7]构建了一种线性规划模型,首先确定属性权重,再对各方案进行排序,从而解决了这一多属性群决策问题.当属性的信息是残缺直觉判断形式并且权重信息未知时,牛利利^[8]给出了一种多属性群决策方法.丁晓阳^[10]在直觉模糊值优势度的基础上,在属性权重和决策者权重均已知、属性权重不完全和属性权重完全未知的情况下,提出了相应的多属性群决策方法.

在已有的决策方法中,所有专家的权重都是相同的.然而在实际的评价过程中,各个专家受到知识结构、对评价方案了解程度、谈判水平和专家自身偏好等诸多因素的影响,作出判断的水平必然存在差异.对于各个专家的评判结果,如何确定其在专家评价信息集中的重要程度,进而对之进行调整,最终形成专家群体决策,就成为研究的重点.G. L. Sun^[12]在区间直觉模糊环境和各专家权重信息完全未知的环境下,提出了一种基于记分函数的决策方法.本文拟利用投影法,在专家权重与准则权重均完全未知的情形下提出多准则群决策方法,并通过实例证明该方法的合理性与有效性.

1 基本概念

定义1 设X是非空集合,称X上形如

$$A = \{ \langle x, \mu_A(x), v_A(x) \rangle \mid x \in X \}$$

$$B^k = (b_{ij}^k) = (\langle \mu_{ij}^k(x_j), v_{ij}^k(x_j) \rangle)_{m \times n} =$$

$$\left(\begin{array}{cccc} \langle \mu_{11}^k(x_1), v_{11}^k(x_1) \rangle & \langle \mu_{12}^k(x_2), v_{12}^k(x_2) \rangle & \cdots & \langle \mu_{1n}^k(x_n), v_{1n}^k(x_n) \rangle \\ \langle \mu_{21}^k(x_1), v_{21}^k(x_1) \rangle & \langle \mu_{22}^k(x_2), v_{22}^k(x_2) \rangle & \cdots & \langle \mu_{2n}^k(x_n), v_{2n}^k(x_n) \rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle \mu_{m1}^k(x_1), v_{m1}^k(x_1) \rangle & \langle \mu_{m2}^k(x_2), v_{m2}^k(x_2) \rangle & \cdots & \langle \mu_{mn}^k(x_n), v_{mn}^k(x_n) \rangle \end{array} \right)$$

的三重组为X上的一个直觉模糊集,其中 $\mu_A(x)$, $v_A(x) \in [0,1]$ 分别为x属于A的隶属度与非隶属度,并且满足 $0 \leq \mu_A(x) + v_A(x) \leq 1$.称 $\pi_A(x) = 1 - \mu_A(x) - v_A(x)$ 为直觉模糊集的直觉指数或犹豫度,显然 $0 \leq \pi_A(x) \leq 1$.

为方便起见,称 $\alpha = \langle \mu_\alpha, v_\alpha \rangle$ 为一个直觉模糊数,其中 $\mu_\alpha, v_\alpha \in [0,1]$,且满足 $0 \leq \mu_\alpha + v_\alpha \leq 1$.

定义2^[11] 令 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 是一个有限集,A是X上一个直觉模糊集,则称

$$|A| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2}$$

为A的模,其中 $\alpha_i = (\mu_{\alpha_i}, v_{\alpha_i}, \pi_{\alpha_i})$ 是A的第i分量, $|\alpha_i|$ 是 α_i 的模,即

$$|\alpha_i| = \sqrt{(\mu_{\alpha_i})^2 + (v_{\alpha_i})^2 + (\pi_{\alpha_i})^2}$$

定义3^[11] 令 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 是一个有限集,A,B均为X上的直觉模糊集,则称

$$Pr j_B A = \frac{\sum_{i=1}^n (\mu_{\alpha_i} \mu_{\beta_i} + v_{\alpha_i} v_{\beta_i} + \pi_{\alpha_i} \pi_{\beta_i})}{|B|}$$

为A在B上的投影,其中 α_i 和 $\beta_i = (\mu_{\beta_i}, v_{\beta_i}, \pi_{\beta_i})$ 为直觉模糊集A与B的第i分量.

显然,Pr j_B A越大,说明A越接近B. n = 1时,就可以得到直觉模糊数 $\alpha_1 = (\mu_{\alpha_1}, v_{\alpha_1}, \pi_{\alpha_1})$ 在 $\beta_1 = (\mu_{\beta_1}, v_{\beta_1}, \pi_{\beta_1})$ 上的投影,即

$$Pr j_{\beta_1} \alpha_1 = \frac{\mu_{\alpha_1} \mu_{\beta_1} + v_{\alpha_1} v_{\beta_1} + \pi_{\alpha_1} \pi_{\beta_1}}{|\beta_1|} \quad (1)$$

2 直觉模糊多准则群决策问题解法

假设方案集 $A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$,属性集 $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$,决策者集 $D = \{d_1, d_2, \dots, d_t\}$, $A^k = \{\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k\}$.第k个决策者的第j个属性的权重 $\lambda_j^k \geq 0, j = 1, 2, \dots, n, \sum_{j=1}^n \lambda_j^k = 1, w = \{w_1, w_2, \dots, w_t\}, w_k \geq 0, k = 1, 2, \dots, t, \sum_{k=1}^t w_k = 1, w_k$ 表示第k个属性的权重,第k个决策者的决策矩阵记为

其中, $\langle \mu_{ij}^k(x_j), v_{ij}^k(x_j) \rangle$ 为直觉模糊数, $\mu_{ij}^k(x_j)$ 表示第 k 个决策者的第 i 个方案对第 j 个属性的隶属度, $v_{ij}^k(x_j)$ 表示第 k 个决策者的第 i 个方案对第 j 个属性的非隶属度, $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, t$. 在专家权重与准则权重完全未知的情况下, 要解决直觉模糊多准则群决策问题, 首先要由评价矩阵求出各专家的权重, 将多准则群决策问题转化为多准则决策问题, 算法步骤如下.

步骤1 在决策专家提出直觉模糊决策矩阵 B^k 以后, 求出各决策矩阵的平均决策矩阵 $B^* = (b_{ij}^*) = (\langle \mu_{ij}^*, v_{ij}^*, \pi_{ij}^* \rangle)_{m \times n}$, 其中

$$\mu_{ij}^* = \frac{1}{t} \sum_{k=1}^t \mu_{ij}^k, v_{ij}^* = \frac{1}{t} \sum_{k=1}^t v_{ij}^k, \pi_{ij}^* = \frac{1}{t} \sum_{k=1}^t \pi_{ij}^k$$

步骤2 由①式计算每一个直觉模糊数 b_{ij}^k 在平均值 b_{ij}^* 上的投影

$$\Pr j_{b_{ij}^*} b_{ij}^k = \frac{\mu_{ij}^k \mu_{ij}^* + v_{ij}^k v_{ij}^* + \pi_{ij}^k \pi_{ij}^*}{|b_{ij}^*|} \quad (2)$$

b_{ij}^k 的权重就可以通过下式得到:

$$\lambda_{ij}^k = \Pr j_{b_{ij}^*} b_{ij}^k / \sum_{k=1}^t \Pr j_{b_{ij}^*} b_{ij}^k$$

步骤3 在得出所有的专家权重以后, 对不同专家提出的决策值综合计算以后, 可以得到综合决策矩阵 $B = (b_{ij})_{m \times n}$, 其中, $b_{ij} = \lambda_{ij}^1 b_{ij}^1 + \lambda_{ij}^2 b_{ij}^2 + \lambda_{ij}^t$, 这样就多准则群决策问题转化为多准则决策问题, 按照文献[9]提出的算法利用模糊熵求出各准则的权重, 进而解决问题, 具体步骤如下.

首先, 利用模糊熵求出各准则的权重

$$\omega_i = \frac{1 - H_j}{n - \sum_{j=1}^n H_j} \quad (3)$$

其中

$$H_j = \frac{1}{m} E(C_j) =$$

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (1 - \mu_A(x_1) - v_A(x_i)) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \pi_A(x_i)$$

且有 $w_j \in [0, 1], \sum_{j=1}^n w_j = 1$.

然后, 利用文献[9]得到各方案的加权记分函数

$$W_j(A_i) = w_1 J(\mu_{i1}, v_{i1}) + w_2 J(\mu_{i2}, v_{i2}) + \dots + w_n J(\mu_{in}, v_{in}) \quad (4)$$

其中 $J(\alpha, \beta) = \alpha + \alpha(1 - \alpha - \beta)$.

最后, 比较 $W_j(A_i)$ 的大小并得到各方案的优劣

排序. $W_j(A_i)$ 越大, 方案 A_i 越能满足决策者的要求.

3 算例分析

某公司拟对外投资, 可选方案分别为软件外包企业 A_1 , 清洁能源企业 A_2 , 连锁餐饮企业 A_3 , 快递企业 A_4 . 由于条件有限, 只能选择一个企业进行投资, 并且投资公司认为决策需考虑以下4个指标: 企业近3年成长能力 X_1 , 企业潜在的风险 X_2 , 企业未来持续盈利的能力 X_3 , 企业内外部经营环境 X_4 . 投资公司聘请4人专家团队进行评价, 并最终决策.

4位专家的评价值构成了4个直觉模糊决策矩阵 $R^k = (r_{ij}^k)_{4 \times 4} (k = 1, 2, \dots, 4)$ (见表1). 按照本文方法求出最优选择, 具体步骤如下.

表1 各专家的直觉模糊决策矩阵 R^k

决策者	方案	属性 X_1	属性 X_2	属性 X_3	属性 X_4
D_1	A_1	$\langle 0.5, 0.4 \rangle$	$\langle 0.5, 0.3 \rangle$	$\langle 0.2, 0.6 \rangle$	$\langle 0.4, 0.4 \rangle$
	A_2	$\langle 0.7, 0.3 \rangle$	$\langle 0.3, 0.3 \rangle$	$\langle 0.6, 0.2 \rangle$	$\langle 0.5, 0.4 \rangle$
	A_3	$\langle 0.5, 0.4 \rangle$	$\langle 0.6, 0.4 \rangle$	$\langle 0.2, 0.7 \rangle$	$\langle 0.5, 0.3 \rangle$
	A_4	$\langle 0.7, 0.2 \rangle$	$\langle 0.3, 0.6 \rangle$	$\langle 0.4, 0.4 \rangle$	$\langle 0.4, 0.5 \rangle$
D_2	A_1	$\langle 0.5, 0.5 \rangle$	$\langle 0.8, 0.2 \rangle$	$\langle 0.6, 0.2 \rangle$	$\langle 0.7, 0.2 \rangle$
	A_2	$\langle 0.4, 0.5 \rangle$	$\langle 0.6, 0.2 \rangle$	$\langle 0.7, 0.3 \rangle$	$\langle 0.3, 0.4 \rangle$
	A_3	$\langle 0.5, 0.3 \rangle$	$\langle 0.2, 0.7 \rangle$	$\langle 0.8, 0.1 \rangle$	$\langle 0.7, 0.1 \rangle$
	A_4	$\langle 0.6, 0.2 \rangle$	$\langle 0.3, 0.5 \rangle$	$\langle 0.5, 0.5 \rangle$	$\langle 0.9, 0.1 \rangle$
D_3	A_1	$\langle 0.5, 0.3 \rangle$	$\langle 0.7, 0.2 \rangle$	$\langle 0.5, 0.3 \rangle$	$\langle 0.5, 0.4 \rangle$
	A_2	$\langle 0.6, 0.3 \rangle$	$\langle 0.6, 0.2 \rangle$	$\langle 0.7, 0.2 \rangle$	$\langle 0.8, 0.1 \rangle$
	A_3	$\langle 0.7, 0.3 \rangle$	$\langle 0.4, 0.4 \rangle$	$\langle 0.6, 0.3 \rangle$	$\langle 0.2, 0.7 \rangle$
	A_4	$\langle 0.4, 0.5 \rangle$	$\langle 0.6, 0.2 \rangle$	$\langle 0.4, 0.6 \rangle$	$\langle 0.7, 0.2 \rangle$
D_4	A_1	$\langle 0.4, 0.5 \rangle$	$\langle 0.3, 0.6 \rangle$	$\langle 0.6, 0.2 \rangle$	$\langle 0.4, 0.5 \rangle$
	A_2	$\langle 0.7, 0.2 \rangle$	$\langle 0.4, 0.6 \rangle$	$\langle 0.2, 0.7 \rangle$	$\langle 0.6, 0.2 \rangle$
	A_3	$\langle 0.4, 0.4 \rangle$	$\langle 0.2, 0.8 \rangle$	$\langle 0.6, 0.2 \rangle$	$\langle 0.5, 0.4 \rangle$
	A_4	$\langle 0.4, 0.5 \rangle$	$\langle 0.7, 0.2 \rangle$	$\langle 0.6, 0.3 \rangle$	$\langle 0.3, 0.5 \rangle$

首先求出各个专家决策矩阵的平均值 $R^* = (r_{ij}^*)_{4 \times 4}$ (见表2).

利用公式②得到 r_{ij}^k 在平均值 r_{ij}^* 上的投影, 即

$$\begin{aligned} \Pr j_{r_{11}^*} r_{11}^1 &= 0.647 & \Pr j_{r_{11}^*} r_{11}^2 &= 0.698 \\ \Pr j_{r_{11}^*} r_{11}^3 &= 0.597 & \Pr j_{r_{11}^*} r_{11}^4 &= 0.640 \end{aligned}$$

进而得到 $r_{ij}^k (k = 1, 2, 3, 4)$ 的权重 $\lambda_{11}^1 = 0.25, \lambda_{11}^2 = 0.27, \lambda_{11}^3 = 0.23, \lambda_{11}^4 = 0.25$. 这些即为各位决策专家的方案 A_1 关于属性 G_1 的权重. 由此可以得到

$$\begin{aligned} r_{11} &= \lambda_{11}^1 r_{11}^1 + \lambda_{11}^2 r_{11}^2 + \lambda_{11}^3 r_{11}^3 + \lambda_{11}^4 r_{11}^4 = \\ &< 0.475, 0.429 > \end{aligned}$$

利用同样的方法就可以得到综合评估矩阵 R (见表3).

表2 平均决策矩阵 R^*

方案	属性 X_1	属性 X_2	属性 X_3	属性 X_4
A_1	$\langle 0.475, 0.425 \rangle$	$\langle 0.575, 0.325 \rangle$	$\langle 0.475, 0.325 \rangle$	$\langle 0.5, 0.375 \rangle$
A_2	$\langle 0.6, 0.325 \rangle$	$\langle 0.475, 0.325 \rangle$	$\langle 0.55, 0.35 \rangle$	$\langle 0.55, 0.275 \rangle$
A_3	$\langle 0.525, 0.35 \rangle$	$\langle 0.35, 0.46 \rangle$	$\langle 0.55, 0.325 \rangle$	$\langle 0.475, 0.375 \rangle$
A_4	$\langle 0.525, 0.35 \rangle$	$\langle 0.475, 0.375 \rangle$	$\langle 0.475, 0.36 \rangle$	$\langle 0.475, 0.325 \rangle$

表3 综合评估矩阵 R

方案	属性 X_1	属性 X_2	属性 X_3	属性 X_4
A_1	$\langle 0.475, 0.429 \rangle$	$\langle 0.567, 0.34 \rangle$	$\langle 0.483, 0.317 \rangle$	$\langle 0.506, 0.371 \rangle$
A_2	$\langle 0.61, 0.318 \rangle$	$\langle 0.487, 0.321 \rangle$	$\langle 0.571, 0.333 \rangle$	$\langle 0.576, 0.258 \rangle$
A_3	$\langle 0.534, 0.347 \rangle$	$\langle 0.344, 0.586 \rangle$	$\langle 0.578, 0.297 \rangle$	$\langle 0.48, 0.37 \rangle$
A_4	$\langle 0.531, 0.344 \rangle$	$\langle 0.48, 0.363 \rangle$	$\langle 0.478, 0.45 \rangle$	$\langle 0.611, 0.299 \rangle$

这样就把多准则群决策问题转化为多准则决策问题。

首先确定各属性的权重:

$$w_1 = 0.25 \quad w_2 = 0.24 \quad w_3 = 0.26 \quad w_4 = 0.25$$

利用式④得到各方案的加权记分函数:

$$\begin{aligned} W_{J_1}(A_1) &= \omega_1 J_1(\mu_{11}, v_{11}) + \omega_2 J_1(\mu_{12}, v_{12}) + \\ &\quad \omega_3 J_1(\mu_{13}, v_{13}) + \omega_4 J_1(\mu_{14}, v_{14}) = \\ &= 0.25 * (\mu_{11} + \mu_{11}(1 - \mu_{11} - v_{11})) + \\ &= 0.24 * (\mu_{12} + \mu_{12}(1 - \mu_{12} - v_{12})) + \\ &= 0.26 * (\mu_{13} + \mu_{13}(1 - \mu_{13} - v_{13})) + \\ &= 0.25 * (\mu_{14} + \mu_{14}(1 - \mu_{14} - v_{14})) = 0.572 \end{aligned}$$

用同样的方法可以得到 $W_{J_1}(A_2) = 0.$

632 $W_{J_1}(A_3) = 0.544, W_{J_1}(A_4) = 0.582$, 比较大

小得 $W_{J_1}(A_2) > W_{J_1}(A_4) > W_{J_1}(A_1) > W_{J_1}(A_3)$

故第二投资方案即清洁能源企业为最佳选择。

接下来考虑忽略所有专家权重的情形,即所有专家权重均相同,有

$$\lambda_{ij}^k = 0.25 \quad i, j, k = 1, 2, 3, 4$$

此时的综合决策矩阵 R 即平均决策矩阵 R^* , 首先确定各属性的权重 $w_1 = 0.26, w_2 = 0.24, w_3 = 0.245, w_4 = 0.255$, 然后计算各方案的加权记分函数得:

$$W_{J_1}(A_1) = 0.5807 \quad W_{J_1}(A_2) = 0.572$$

$$W_{J_1}(A_3) = 0.544 \quad W_{J_1}(A_4) = 0.58$$

比较大小得

$$W_{J_1}(A_2) > W_{J_1}(A_4) > W_{J_1}(A_1) > W_{J_1}(A_3)$$

故第一投资方案即软件外包企业为最佳选择。

由此可以看出,在考虑专家权重以后得到了不同的排序结果,这个结果体现了专家在决策经验、知识结构等方面存在差异,因此考虑专家权重的方

案更符合实际,能够更加科学、合理地指导投资决策。

4 结论

本文采用投影法,研究了在专家权重和属性权重完全未知情形下的直觉模糊多准则群决策问题,提出了一种解决方法,该方法首先提出了一个投影模型,利用该模型可以确定各个专家权重,进而把群决策问题转化为决策问题;然后利用加权记分函数确定各属性权重进而得到最优方案.实例对比验证了该方法的有效性和可行性.如何将专家的客观权重和主观权重相结合,得到综合权重,并将其应用于各种决策以提高决策的科学性,将是下一步研究的重点。

参考文献:

- [1] Atanassov K. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986(20):87.
- [2] Bustince H, Burillo P. Vague sets are intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1996, 79(3):403.
- [3] Gau W L, Buehrer D J. Vague sets[J]. IEEE Trans Systems, Man and Cybernetics, 1993, 23(2):610.
- [4] Bass S M, Kwakernakk H. Rating and ranking of multiple aspect alternative using fuzzy sets[J]. Automatica, 1977, 13(1):47.
- [5] 李荣均. 模糊多属性决策理论与应用[M]. 北京:科学出版社, 2002.
- [6] 孙丽, 毛红军, 贾静丽, 等. 一种基于 Vague 集的多属性群决策排序方法及其应用[J]. 阜阳师范学院学报:自然科学版, 2011, 28(2):4.
- [7] Li D F. Multiattribute decision making models and methods using intuitionistic fuzzy sets[J]. Journal of Computer and System Science, 2005, 70(1):73.
- [8] 牛利利. 基于决策者风险偏好的直觉模糊数排序方法[D]. 南宁:广西大学, 2013.
- [9] 孙贵玲, 张荣艳. 直觉模糊环境下基于记分函数和模糊熵的多准则决策方法[J]. 山东轻工业学院学报:自然科学版, 2011, 25(3):71.
- [10] 丁晓阳. 基于直觉模糊集的多属性群决策方法及其应用[D]. 海口:海南师范大学, 2013.
- [11] Xu Z S, Hu H. Projection models for intuitionistic fuzzy multiple attribute decision making[J]. International Journal of Information Technology, 2010(9):267.
- [12] Sun G L. A group decision making method based on projection method and fuzzy entropy under IVIFS environment[J]. British Journal of Mathematics & Computer Science, 2015, 9(1):62.