



引用格式:苏日建,孙汉锋,甘勇,等. 测量中模数转换分辨率的信息熵计算[J]. 轻工学报, 2016,31(5):58-62.

中图分类号:TP274 文献标识码:A

DOI:10.3969/j.issn.2096-1553.2016.5.010

文章编号:2096-1553(2016)05-0058-05

测量中模数转换分辨率的信息熵计算

Information entropy calculation of resolution for analog-to-digital converter in measurement

苏日建,孙汉锋,甘勇,李灿林,张秋闻

SU Ri-jian, SUN Han-feng, GAN Yong, LI Can-lin, ZHANG Qiu-wen

关键词:

信息熵;模数转换;分辨率;平均法则;信噪比

郑州轻工业学院 计算机与通信工程学院,河南 郑州 450001

School of Computer and Communication Engineering, Zhengzhou University of Light Industry, Zhengzhou 450001, China

Key words:

information entropy;
analog-to-digital
converter; resolution;
average rule; signal
noise rate

摘要:针对测量仪器数据采集与处理过程中模数转换器件所需分辨率的不确定性,提出了通过信源的信息熵平均法则计算模数转换器件分辨率的方法:利用大数定律,论证了在测量信息论中信息熵的平均法则,进而推导出在测量系统的数据采集部分设计中模数转换器件所需信噪比与模数转换位数之间的关系——器件的位数越高,对应的分辨率越高,获取测量信息就越多,而这些均与相应的信息熵有对应的计算关系.应用实例验证了该方法的合理性.

收稿日期:2015-05-20

基金项目:国家自然科学基金项目(61374014,61302118,U1404623)

作者简介:苏日建(1970—),男,山东省日照市人,郑州轻工业学院副教授,博士,主要研究方向为嵌入式系统、智能信息处理.

Abstract: A calculation method of analog-to-digital converter resolution based on the the average rule of information entropy was proposed according to the uncertainty of acquisition in the data acquisition and processing system of measurement instruments. The average rule of information entropy was demonstrated by the law of large numbers in probability theory, and the relationship between signal noise rate of analog-to-digital converter and analog-to-digital converter digit was analyzed. The higher signal noise rate of analog-to-digital converter, the higher the resolution of analog-to-digital converter and the more the information acquired. There was corresponding calculation relationship between them and the corresponding information entropy. The experiment proved the rationality of the method.

0 引言

在现代测量技术中,测量的物理量能否被有效采集和处理非常重要,而模数转换器件则是数据采集系统的核心器件^[1].模数转换器件的一个重要技术指标是分辨率(Resolution),是与转换精度相关的指标,其外在表现就是输出的数字量的二进制位数.从编码的角度看,它又是描述物理量精确度的指标^[2].通常情况下,数模转换器件的位数越多,对应的分辨率就越高,测量的结果相对就越准确.而在实际测量过程中,由于技术和成本等条件的限制,模数转换器件的分辨率不可能也没有必要做到无限多位,如何根据实际需要确定测量过程所需的分辨率便成为影响测量结果的关键步骤.在以往的工程实践中,通常是设计者根据经验选择模数转换器件的位数,缺乏相应的理论依据.信息熵作为现代通信理论的基础,不仅仅适用于通信信号的描述,也有研究者尝试将其用于测量信息的描述.C. H. Chen 等^[2]从能量谱角度给出了信息熵与分辨率的对应关系.M. S. Hughes 等^[1-5]基于热动力学方程,对比了基于熵的测量信息波形与基于能量的功率谱,并尝试找出其共性.H. Schmid 等^[6]利用最大熵分布描述了模数转换器的非线性精度边界.然而,目前尚未有针对模数转换精度的信息描述.鉴于此,本文拟提出一种计算方法,利用信息熵的平均法则推导出测量仪器在数据采集和处理设计过程中模数转换器件所需分辨率,以期从测量信息论

的角度对数据采集和处理系统的设计给出理论指导.

1 信息熵基本原理

随机试验中随机事件每次出现的结果不同,但是每一事件多次重复试验出现的频率却趋于稳定,并且结果的平均值也接近某个确定的值,称为平均法则,即大数定律^[7].在信息论中,对于独立同分布的随机变量序列,当序列数趋向无穷时,序列联合概率倒数的对数平均值依概率趋近其信息熵,即信息熵的平均法则^[8].文献[9-12]论述了不同类型信源信息熵的平均法则在编码方面的应用.在测量仪器中,对某一物理量的测量,通常都是通过传感器感知到所要测量的信号,然后再通过放大、滤波等信号调理电路,将信号调整至模数转换电路的输入范围,经模数转换后得到相应的数字信号,再通过数字信号处理等步骤,最后得到所需的相应量^[13],以数值或其他约定的形式显示出来.

信息熵作为信源总体信息测度的确定量,表示的是信源所发出符号提供的平均信息量,即信源中每一符号在信源概率空间的统计平均值.信源 X 的信息熵用 $H(X)$ 表示,其数学模型为

$$H(X) = - \sum_{x_i \in X} p(x_i) \log p(x_i)$$

其中, x_i 为表示信源 X 的随机变量的可能取值, $p(x_i)$ 为其概率.由信息熵的数学模型可知,信息熵为非负值,说明无论在何种情况下,信源总

是能够提供一定的信息量.

2 信息熵的平均法则

对于离散随机变量 ζ , 如果其分布服从

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix} \quad (1)$$

且令 $x_i = \log \frac{1}{p_i} (i = 1, 2, \dots, n)$, 则信息熵可视为随机变量 ζ 的数学期望, 即

$$H(\xi) = E\xi \quad (2)$$

如果 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 是相互独立的随机变量序列, 则其数学期望 $E\xi_1 = a_1, E\xi_2 = a_2, \dots, E\xi_n = a_n$; 方差 $D\xi_1 = l_1, D\xi_2 = l_2, \dots, D\xi_n = l_n$, 并且对于 $D\xi_i < l, i = 1, 2, \dots, n, l$ 与 i 无关, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 有

$$D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D\xi_i < \frac{1}{n^2} \quad (3)$$

$$E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E\xi_i$$

而对于 ξ_i 存在

$$P(|\xi_i - E\xi_i| \geq \varepsilon) = \sum_{|x_i - E\xi_i| \geq \varepsilon} P(\xi_i = x_k) \quad (4)$$

因为 $1 \geq |\xi_i - E\xi_i| \geq \varepsilon > 0$, 所以 $(\xi_i - E\xi_i)^2 \leq \varepsilon^2$, 则

$$\sum_{|x_i - E\xi_i| \geq \varepsilon} P(\xi_i = x_k) \leq \sum_{|x_i - E\xi_i| \geq \varepsilon} \frac{(x_k - E\xi_i)^2}{\varepsilon^2} p_k \quad (5)$$

显而易见

$$\sum_{|x_i - E\xi_i| \geq \varepsilon} \frac{(x_k - E\xi_i)^2}{\varepsilon^2} p_k \leq \sum_k \frac{(x_k - E\xi_i)^2}{\varepsilon^2} p_k \quad (6)$$

而 $\sum_k (x_k - E\xi_i)^2 p_k$ 正是 ξ_i 的方差 $D\xi_i$, 综合

④—⑥ 式可得

$$P(|\xi_i - E\xi_i| \geq \varepsilon) \leq \frac{D\xi_i}{\varepsilon^2}$$

那么

$$P(|\xi_i - E\xi_i| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D\xi_i}{\varepsilon^2}$$

于是在公式 ③ 的条件约束下, 有

$$P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E\xi_i\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{l}{n\varepsilon^2}$$

又由于任何事件的概率都 ≤ 1 , 联合上式有

$$1 \geq P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E\xi_i\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{l}{n\varepsilon^2}$$

由此可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E\xi_i\right| < \varepsilon\right) = 1$$

即当 n 趋向无穷时, 随机变量序列 ξ_i 的算术平均值依概率趋于其数学期望的平均值. 当 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 为独立且服从 ① 式的同分布随机变量序列时, 上式可记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i - E\xi\right| < \varepsilon\right) = 1$$

其中, $E\xi$ 为序列中随机变量的期望. 令 $\xi_i = \log \frac{1}{p_i} (i = 1, 2, \dots, n)$, 由上式可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \frac{1}{p_i} - E\xi\right| < \varepsilon\right)$$

根据对数的运算公式可得

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \frac{1}{p_i} = -\frac{1}{n} \log \prod_{i=1}^n p_i$$

又由于 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 相互独立, 则

$$-\frac{1}{n} \log \prod_{i=1}^n p_i = -\frac{1}{n} \log P(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

故可推导出

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \log P(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) - E\xi\right| < \varepsilon\right) \quad (7)$$

最后由式 ②⑦ 可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i - H(\xi)\right| < \varepsilon\right) = 1 \quad (8)$$

因此, 如果 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 为独立且服从 ① 式概率分布的独立同分布随机变量序列, 当 n 趋向无穷时, $\frac{1}{n} \log P(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ 依概率趋于信息熵 $H(\xi)$, 即 $\frac{1}{n} \log P(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \xrightarrow{p} H(\xi)$.

3 模数转换分辨率的计算

对于服从①式概率分布的独立同分布随机变量序列 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, 可通过信息熵的大数定律来获取对这些序列的最短描述, 进而推导出模数转换器件所需的最小位数. 设 U 为序列 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 能够提供的信息全集, 集合 A 为测量所关注的测量信息集; A^c 为信息全集中不属于 A 的元素, 即为测量过程中对应有用测量信息的噪声, 信息全集与测量信息集的关系见图 1.

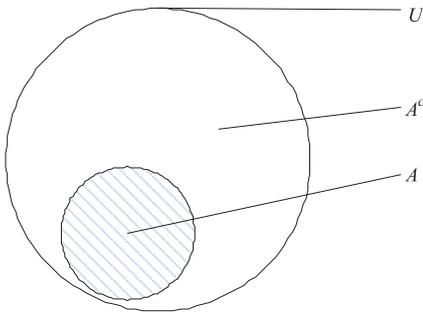


图 1 信息全集与测量信息集的关系

Fig. 1 The relationship diagram between the information collected and the measurement information collected

根据⑧式, 定义 A 为满足

$$(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in U$$

$$2^{-n(H(\xi) - \varepsilon)} \geq P(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \geq 2^{-n(H(\xi) + \varepsilon)} \quad (9)$$

的序列集合, 并定义 $|A|$ 为集合 A 中元素数量. 由于 U 是随机变量序列的信息全集, 由其概率空间的完备性可知 $\sum_{\xi \in U} P(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = 1$.

由于 A 是 U 的子集, 所以

$$\sum_{\xi \in A} P(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \leq \sum_{\xi \in U} P(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

又根据⑨式, 得

$$\sum_{\xi \in A} 2^{-n(H(\xi) + \varepsilon)} \leq \sum_{\xi \in U} P(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

而上式的左端等于 $2^{-n(H(\xi) + \varepsilon)} |A|$, 所以可

以得出 $2^{-n(H(\xi) + \varepsilon)} |A| \leq 1$, 即

$$|A| \leq 2^{n(H(\xi) + \varepsilon)} \quad (10)$$

由⑧式亦可知, $n \rightarrow \infty$ 时, $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in A$ 的概率亦趋于 1, 因此, 对于任意正数 δ 存在 n_0 , 当 $n > n_0$ 时, 有

$$\Pr \left\{ \left| -\frac{1}{n} \log P(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) - H(\xi) \right| < \varepsilon \right\} > 1 - \delta$$

如令 $\delta = \varepsilon$, 则

$$\Pr \{A\} > 1 - \varepsilon \quad (11)$$

要实现对信息全集 U 中所需测量的信息集 A 的全部获取, 只要对信息全集进行有效的描述即可. 对 A 的最短编码的有效描述, 实质就是数模转换器件对应的最低分辨率, 也就是可以取得相应输出数字量的最低位数. 设 $r(\xi^n)$ 代表描述 A 的编码长度, 则其数学期望为

$$E(r(\xi^n)) = \sum_A p(\xi) r(\xi^n)$$

而对应的噪声集为

$$E(r(\xi^n)) = \sum_{A^c} p(\xi) r(\xi^n)$$

因此, 可以得到相应的信噪比为

$$SNR = \frac{\sum_{\xi \in A} p(\xi) r(\xi^n)}{\sum_{\xi \in A^c} p(\xi) r(\xi^n)} \quad (12)$$

又根据⑩式可知, 测量信息集 A 所需的编码长度 $r(\xi^n) \leq n(H(\xi) + \varepsilon)$, 噪声集 A^c 的编码长度可以定义为 $r(\xi^n) \leq (n \log |U| + 1)$, 于是得到

$$E(r(\xi^n)) \leq \sum_{\xi \in A} p(\xi) (n(H(\xi) + \varepsilon) + 1) + \sum_{\xi \in A^c} p(\xi) (n \log |U| + 1)$$

上式取 $n(H(\xi) + \varepsilon) + 1$, 是为了保证长度最小并取大于 1 的整数位, 又根据式⑪有

$$\sum_{\xi \in A} p(\xi) (n(H(\xi) + \varepsilon) + 1) \leq n(H(\xi) + \varepsilon) + 1 \quad (13)$$

而噪声集的编码长度

$$\sum_{\xi \in A^c} p(\xi) (n \log |U| + 1) \leq \varepsilon (n \log |U| + 1) \quad (14)$$

由联合式 ⑬⑭ 推导出

$$E(r(\xi^n)) \leq n(H(\xi) + \delta)$$

其中, $\xi = \varepsilon + \varepsilon \log|U| + (1 + \varepsilon)/n$. 只要 ε 和 n 选取得合适, δ 可以任意小, 由此可以得出 A 编码最小长度为 $nH(\xi)$, 也就是至少要使用分辨率为 $nH(\xi)$ 的模数转换器才可以完成输出代码表示. 由上面一系列的推导、计算可以看出, 模数转换的分辨率可以通过对离散信源的信息熵的计算来确定.

4 应用实例

在某测量系统中, 设模数转换器件的输入为连续随机变量 X , 输出的数字量为对称于原点的等间距分布的离散随机变量 $Y = \{s_1, s_2, \dots, s_N\}$, N 为均值为 0, 方差为 $\sigma_n^2/2$ 的高斯白噪声. 根据公式 ⑫ 即可得到图 2 所示的模数转换位数 (Bit)、信噪比和测量信息之间的关系.

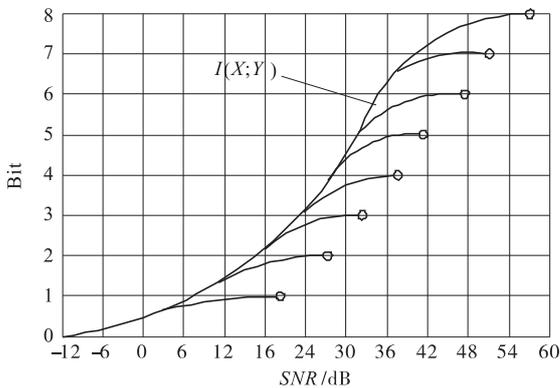


图 2 模数转换位数、信噪比及测量信息关系图
Fig. 2 The relationship diagram of analog-to-digital converter digit, the signal noise rate and measurement information

从图 2 可知, 在模数转换过程中获取的测量信息与模数转换器的分辨率及输入信噪比均有关系, 信噪比越大, 且使用的模数转换器位数越多, 则获取的测量信息也越多; 当测量系统的信噪比较高时, 只有采用足够高的模数转换位数才能保证获取的测量信息足够多.

5 结论

本文以大数定律为基础, 推导出测量信息熵的平均法则, 并利用该法则来进行测量设备数据采集系统中模数转换器分辨率的计算. 从实例的计算结果可以看出, 器件的位数越高, 对应的分辨率越高, 获取的测量信息就越多. 通过本文提出的计算方法可以进行设计前的理论预估, 使得原来靠经验进行器件选择的工作, 在理论上以信息熵的形式给出了依据, 对实际工程设计具有指导意义.

参考文献:

[1] RODRIGUEZ-NAVARRO D, LAZARO-GALILEA J L, BRAVO-MUNOZ I, et al. Analysis and calibration of sources of electronic error in PSD sensor response [J]. Sensors, 2016, 16 (5): 619.

[2] CHEN C H, HE T, ZHANG Y, et al. Incremental analog-to-digital converters for high-resolution energy-efficient sensor interfaces [J]. IEEE Journal on Emerging and Selected Topics in Circuits and Systems, 2015, 5(4):612.

[3] KIERANS A S, BENNETT G L, MUSSI T C, et al. Characterization of malignancy of adnexal lesions using ADC entropy: Comparison with mean ADC and qualitative DWI assessment [J]. Journal of Magnetic Resonance Imaging, 2013, 37(1):164.

[4] HUGHES M S. Analysis Of digitized waveforms using Shannon Entropy [J]. Journal of the Acoustical Society of America, 1993, 93 (2): 892.

[5] HUGHES M S, MCCARTHY J E, BRUIL-LARD P J, et al. Entropy vs. energy waveform processing: A comparison based on the heat equation [J]. Entropy, 2015, 17(6):3518.

- E, 1996, 54(1): 406.
- [12] KOPONEN A, KATAJA M, TIMONEN J. Permeability and effective porosity of porous media [J]. *Physical Review E*, 1997, 56(3): 3319.
- [13] Westhuizen J, Du Plessis J P. Quantification of unidirectional fiber bed permeability [J]. *Journal of Composite Materials*, 1994, 28(7): 619.
- [14] YU B M, LI J H. A geometry model for tortuosity of flow path in porous media [J]. *Chinese Physics Letters*, 2004, 21(8): 1569.
- [15] WU M J, YU B M, ZHANG B, et al. A geometry model for tortuosity of streamtubes in porous media with spherical particles [J]. *Chinese Physics Letters*, 2005, 22(6): 1464.
- [16] YUN M, YU B, XU P, et al. Geometrical models for tortuosity of streamlines in three-dimensional porous media [J]. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, 2006, 84(3): 301.
- [17] KOU J L, TANG X M, ZHANG H Y, et al. Tortuosity for streamlines in porous media [J]. *Chinese Physics B*, 2012, 21(4): 364.
- [18] 郁伯铭. 多孔介质输运性质的分形分析研究进展 [J]. *力学进展*, 2003(3): 333.
- [19] 陈永平, 施明恒. 基于分形理论的多孔介质导热系数研究 [J]. *工程热物理学报*, 1999(5): 608.
- [20] LI J H, YU B M. Tortuosity of flow paths through a Sierpinski Carpet [J]. *Chinese Physics Letters*, 2011, 28(3): 1.
- [21] DULLIEN F. Porous media: fluid transport and pore structure [M]. New York: Academic Press, 1979.
- [22] MANDELBROT B B. The fractal geometry of nature [M]. New York: W H Freeman and Company, 1982.

(上接第 62 页)

- [6] SCHMID H, SIGEL S, PASTRE M, et al. An internally non-linear ADC for a Sigma Delta accelerometer loop [C] // *Proceedings of 2010 IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, Piscataway: IEEE, 2010: 2155.
- [7] 王隽骧, 严士健, 刘秀芳. 概率论基础 [M]. 北京: 科学出版社, 2007.
- [8] COVER T M, THOMAS J A. Elements of information theory [M]. New York: Wiley-Interscience, 1991.
- [9] BREIMAN L. The individual ergodic theorems of information theory [J]. *Ann Math Stat*, 1957, 28: 809.
- [10] MOY S C. Generalization of Shannon-McMillan theorem [J]. *Pacific Journal of Mathematics*, 1961(11): 705.
- [11] KIEFFER J C. A simple proof of the Moy-Perez generalization of the Shannon-McMillan theorem [J]. *Pacific J Math*, 1974, 51: 203.
- [12] OREY S. On the Shannon-Perez-Moy theorem [J]. *Contemp Math*, 1985, 41: 319.
- [13] 孙传友. 现代检测技术及仪表 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.