



引用格式:袁培,付云飞,郝亚萍,等.基于 Sierpinski carpet 模型的多孔介质迂曲度计算[J].轻工学报,2016,31(5):69-74.

中图分类号:O351 文献标识码:A

DOI:10.3969/j.issn.2096-1553.2016.5.012

文章编号:2096-1553(2016)05-0069-06

# 基于 Sierpinski carpet 模型的多孔介质迂曲度计算

## Calculation of tortuosity porous media based on Sierpinski carpet model

袁培,付云飞,郝亚萍,王建军,吕彦力

YUAN Pei, FU Yun-fei, HAO Ya-ping, WANG Jian-jun, LYU Yan-li

郑州轻工业学院 能源与动力工程学院,河南 郑州 450002

College of Energy and Power Engineering, Zhengzhou University of Light Industry, Zhengzhou 450002, China

### 关键词:

多孔介质;迂曲度;分形;孔隙率;最小孔隙;分形维数

### Key words:

porous media;  
tortuosity; fractal;  
porosity; smallest  
pores; fractal  
dimension

**摘要:**基于精确自相似 Sierpinski carpet 分形模型,通过求解控制体的迂曲度分布函数,研究了平均迂曲度与孔隙率、最小孔隙特征长度和分形维数的函数关系。结果表明:迂曲度与孔隙率服从  $\overline{\Gamma}_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\varphi$  的计算规律;最小孔隙特征长度、分形维数、欧几里得空间维数共同决定了物体内部空间的复杂程度;多孔介质内部流线迂曲度随孔隙率增大而减小,随最小孔隙特征长度、分形维数的减小而增大。

收稿日期:2015-09-21 修回日期:2016-03-06

基金项目:国家自然科学基金项目(51476148,21446011);郑州市科技攻关项目(141PPTGG418)

作者简介:袁培(1982—),男,河南省南阳市人,郑州轻工业学院讲师,博士,主要研究方向为工程热物理。

**Abstract:** Based on the exact self-similar fractal Sierpinski carpet model, it has been studied that the functional relationship of average tortuosity and porosity, and the functional relationship average tortuosity and minimum pore characteristic length and the fractal dimension by solving the distribution function of tortuosity of the control body. The results showed the tortuosity and porosity calculation obey the rule of  $\overline{\Gamma}_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\varphi$ ; the minimum pore characteristic length, the fractal dimension and Euclidean space dimension determine the complexity of the internal space of object; the tortuosity of porous media flow lines decreases with the increasing of the internal porosity and increases with the decreasing of the smallest pores characteristic length and pore fractal dimension.

## 0 引言

在农产品干燥机理的研究中,流体在生物物质多孔介质中的运输特性,如渗透性、扩散性和导热性受到广泛的关注<sup>[1-7]</sup>,多孔介质内部流线的迂曲度是影响这些运输特性的重要参数.目前,获取多孔介质材料内部的迂曲度通常采用实验测量、数值模拟和理论分析三种方法. A. M. Attia 等<sup>[8-10]</sup>通过实验手段得出迂曲度经验关联式. P. Sen 等<sup>[10]</sup>通过实验手段测得流体流过球形颗粒沉淀物流线的迂曲度,并得出经验关联式.但这些关联式受实验周期较长、实验装置复杂等条件限制,应用范围有限.

近年来,随计算机计算能力的提高,一些学者采用数值模拟的方法来研究多孔介质内部流线迂曲度.其中 A. Koponen 等<sup>[11-12]</sup>采用自动格子气(LG)法总结了不同适用范围的经验关联式,得出二维多孔介质中牛顿不可压缩流体缓慢流动的迂曲度关联式.但这些关联式由于均存在物理意义不明晰的经验常数和极端孔隙率下不符合物理常识等问题,使这些关联式在应用时受到限制.

一些文献通过理论分析方法获得简单几何结构多孔介质内部流线的迂曲度,其中文献[13-17]分别通过分析的方法得出了各自模型下的流线迂曲度.但这种方法只能对简单、规则的几何结构求解,并且在极端孔隙率情况下,会出现结果与实验结果偏差较大的情况.

针对以上问题,许多学者根据多孔介质孔隙尺度和表面分布特性服从分形标度律等规律并基于自相似分形图形方法,提出了多孔介质迂曲度的计算公式<sup>[18-19]</sup>,其中, J. H. Li 等<sup>[20]</sup>基于精确自相似分形图形得出多孔介质迂曲度计算公式,为研究多孔介质内部流线迂曲度提供了新的途径.

由于自然界中存在大量与 Sierpinski carpet 模型有相似结构的现象,本文拟基于精确自相似的 Sierpinski carpet 模型,考虑分形维数与孔隙的影响,给出包含更多信息的一般迂曲度计算式,并分析孔隙率、分形维数和最小孔隙等因素对迂曲度的影响,以期多孔介质中流线迂曲度的计算提供一条新的途径.

## 1 流线迂曲度的分段计算

迂曲度通常定义为<sup>[21]</sup>

$$\Gamma = L_t / L_e \tag{1}$$

其中,  $L_t$  为流体流线的实际长度,  $L_e$  为沿宏观压力方向上的直线长度或特征长度.

流线迂曲度的分段计算示意图如图 1 所示. 将  $L_e$  分为  $n$  段, 长度分别为  $L_{e1}, L_{e2}, \dots, L_{en}$ , 每段对应流线长度为  $L_{t1}, L_{t2}, \dots, L_{tn}$ , 可知

$$L_e = \sum_{i=1}^n L_{ei} \tag{2}$$

$$L_t = \sum_{i=1}^n L_{ti} \tag{3}$$

将式 ②③ 带入式 ① 可得

$$\Gamma = \frac{\sum_{i=1}^n L_{ti}}{\sum_{i=1}^n L_{ei}} \quad (4)$$

由式 ① 可得每段流线的迂曲度为

$$\Gamma_i = L_{ti}/L_{ei} \quad (5)$$

令  $K_i = L_{ei}/L_e$ , 将式 ⑤ 带入式 ④ 可得

$$\Gamma = \sum_{i=1}^n K_i \Gamma_i \quad (6)$$

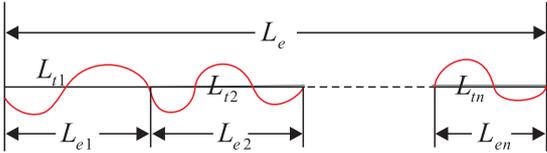


图 1 流线迂曲度的分段计算示意图

Fig. 1 Schematic plot of flow lines tortuosity piecewise calculation

## 2 基于 Sierpinski carpet 模型多孔介质迂曲度

### 2.1 Sierpinski carpet 生长过程

二维 Sierpinski carpet 生成过程如图 2 所示. 由图 2 根据自相似性可知, 第  $n+1$  阶 Sierpinski carpet 的生成过程, 可以看作围绕边长为  $L/3$  的中心骨架放置 6 个缩小 3 倍的第  $n$  阶图形(下文默认 Sierpinski carpet 边长为 1).

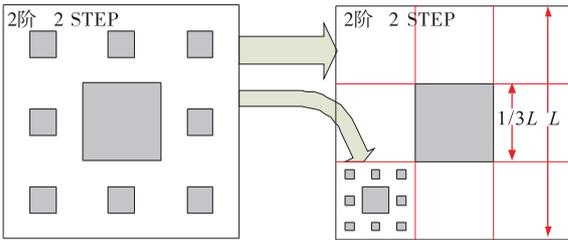


图 2 二维 Sierpinski carpet 生成过程

Fig. 2 Generative process of two-dimensional Sierpinski carpet

### 2.2 Sierpinski carpet 内部流线迂曲度推导与分析

在不考虑流动边界层厚度的情况下, Sierpinski carpet 多孔介质的中流线如图 3 所示. 由图 3 可知, 第  $n+1$  阶 Sierpinski carpet 迂曲度

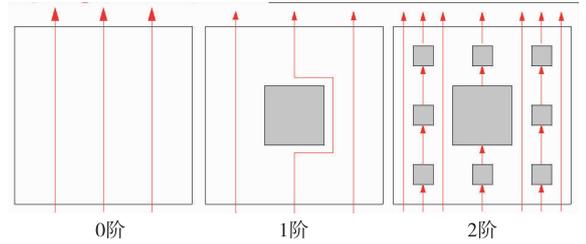


图 3 二维 Sierpinski carpet 流线示意图

Fig. 3 Schematic plot of streamline of two-dimensional Sierpinski carpet

$\Gamma_{n+1}$  可由  $\Gamma_n$  经式 ⑥ 表示为

$$\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n(3x+1) & -\frac{1}{2} \leq x < -\frac{1}{6} \\ \frac{2}{3}\Gamma_n(3x) + \frac{1}{3}g(x) & -\frac{1}{6} \leq x \leq \frac{1}{6} \\ \Gamma_n(3x-1) & \frac{1}{6} < x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

其中,  $\Gamma_0, g(x)$  服从以下分布:

$$\begin{cases} \Gamma_0 = 1 & -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ g(x) = -6|x| + 2 & -\frac{1}{6} \leq x \leq \frac{1}{6} \end{cases}$$

对  $\Gamma_0, g(x)$  计算可得  $\overline{\Gamma_0} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx = 1$ ,

$$\overline{g(x)} = \int_{-\frac{1}{6}}^{\frac{1}{6}} g(x) dx = \frac{1}{2}.$$

记  $\overline{\Gamma_{n+1}} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \Gamma_{n+1}(x) dx$  为  $n+1$  阶

Sierpinski carpet 的平均迂曲度, 对  $\overline{\Gamma_{n+1}}$  计算得

$$\overline{\Gamma_{n+1}} = \frac{8}{9} \overline{\Gamma_{n+1}} + \frac{1}{3} \overline{g(x)} \quad (7)$$

式 ⑦ 经运算可得

$$\overline{\Gamma_n} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{8}{9} \right)^n \quad (8)$$

同时, 可方便地计算得到  $n$  阶 Sierpinski carpet 的孔隙率为

$$\varphi = \left( \frac{8}{9} \right)^n \quad (9)$$

将式 ⑨ 带入式 ⑧ 得

$$\overline{\Gamma_n} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \varphi \quad (10)$$

从式⑩可以看出, Sierpinski carpet 迂曲度随孔隙率增加而减小。

图4将式⑩与其他若干个迂曲度计算公式进行了对比, 可以看出, 式⑩在高孔隙率(0.75 < φ < 1)下可很好地符合其他迂曲度计算公式. 这是因为, 低孔隙率意味着控制体内含有大量结构尺寸较小的颗粒或骨架, 这时流动边界层的厚度、湍流等流动现象的特征长度相较最小孔隙特征长度已经不可忽略, 致使式⑩的偏差较大。

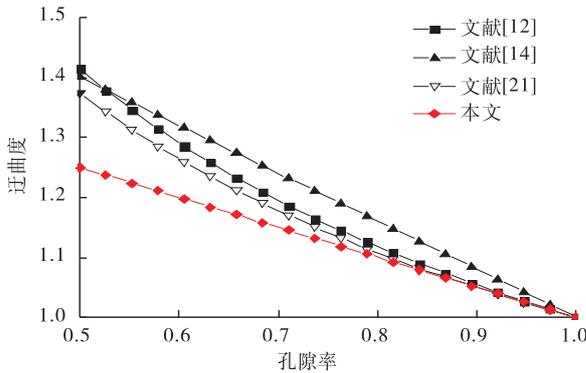


图4 若干迂曲度计算公式对比  
Fig.4 Comparisons among the calculative equations of tortuosity

### 3 迂曲度与最小孔隙特征长度和分形维数关系分析

文献[22]给出了描述和计算分形维数的公式

$$D_f = \ln N(\varepsilon) / \ln(1/\varepsilon) \quad \text{⑪}$$

式中,  $D_f$  为分形维数,  $N(\varepsilon)$  为一个物体的质量、体积、面积或曲线长度,  $\varepsilon$  为测量的长度。

通过计算可得 Sierpinski carpet 的分形维数为  $D_f = \log_3 8$ , 则在 Sierpinski carpet 中孔隙率

$$\varphi = \varepsilon^{d_E} N(\varepsilon) \quad \text{⑫}$$

式中,  $d_E$  为欧几里得空间维数。

将式⑪代入式⑫得

$$\varphi = \varepsilon^{d_E - D_f} \quad \text{⑬}$$

在 Sierpinski carpet 中, 最小孔隙特征长度  $\lambda_{\min} = \varepsilon$ , 式⑬可变为

$$\varphi = \lambda_{\min}^{d_E - D_f} \quad \text{⑭}$$

将式⑭代入式⑩可得

$$\overline{\Gamma}_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \lambda_{\min}^{d_E - D_f} \quad \text{⑮}$$

分析公式⑮可知: 最小孔隙特征长度、分形维数、欧几里得空间维数共同决定了物体内部空间的复杂程度。

图5为式⑮的曲面图. 由图5可以看出, 基于 Sierpinski carpet 模型的多孔介质内部流线迂曲度, 随最小孔隙特征长度的减小而增大, 流线迂曲度越大, 多孔介质内部的孔隙越复杂. 在极端条件下, 当最小孔隙特征长度为0时, 内部流线迂曲度为1.5, 此时控制体被颗粒或骨架填满, 流体不能从控制体内部流过, 只能沿着控制体边界绕流到控制体另一侧, 而1.5正是流体沿正方形边界流动的平均迂曲度; 当最小孔隙特征长度为1时, 内部流线迂曲度为1, 控制体内部没有颗粒或骨架阻碍流体流动, 流体沿直线流过控制体。

以分形维数作为变量时, 随分形维数的减小, 多孔介质内部流线迂曲度增大, 孔隙所占的

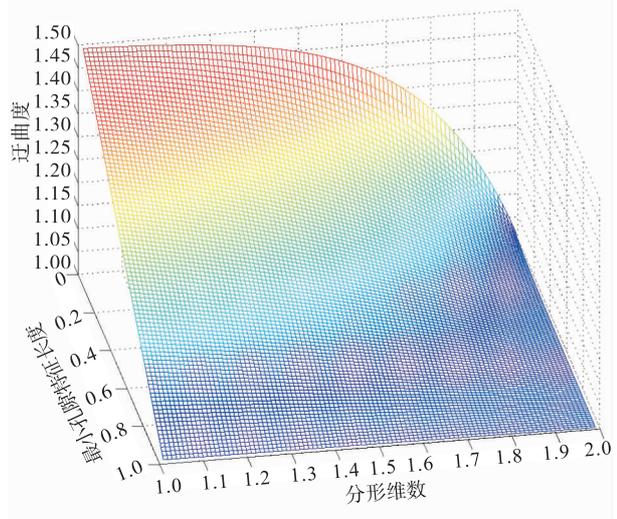


图5 式⑮曲面图

Fig.5 Surface plots of equation ⑮

面积减小,控制体内的颗粒或骨架越多,内部流线所经路径越长.在极端情况下,孔隙占满了整个控制体积,这时的流线迂曲度为 1,流体可沿直线流过控制体;当分形维数为 1 时( $D_f = d_E - 1$ ),意味着整个控制体被颗粒或骨架充满,流线迂曲度为 1.5,也就是说流体沿控制体边缘绕流到控制体另一侧,而 1.5 正是流体沿正方形边界流动的平均迂曲度.

## 4 结论

本文基于精确自相似 Sierpinski carpet 模型推导出具有明确意义的多孔介质内部流线迂曲度一般计算式,研究了平均迂曲度与孔隙率、最小孔隙特征长度和分形维数的关系,结论如下.

1) 迂曲度与孔隙率服从  $\overline{\Gamma}_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\varphi$  的计算规律,多孔介质内部流线迂曲度随孔隙率增加而减小.当孔隙率为 1 时,流线平均迂曲度为 1,流体沿直线流过控制体;当孔隙率为 0 时,流线平均迂曲度为 1.5,控制体为实体.

2) 最小孔隙特征长度、分形维数、欧几里得空间维数共同决定了物体内部空间的复杂程度,内部流线迂曲度随最小孔隙特征长度、分形维数的减小而增大.

## 参考文献:

- [1] MASIS-MELENDÉZ F, DEEPAGODA T K K C, De JONGE L W, et al. Gas diffusion-derived tortuosity governs saturated hydraulic conductivity in sandy soils [J]. *Journal of Hydrology*, 2014, 512: 388.
- [2] IWANEK M, KRUKOWSKI I, WIDOMSKI M, et al. Effect of the van Genuchten model tortuosity parameter on hydraulic conductivity calculations [M] // PAWLOWSKI A, PAWLOWSKI L, DUDZINSKA M R. *Environmental Engineering* III, Boca Raton: CRC Press, 2010: 447 - 454.
- [3] YANG C, NAKAYAMA A. A synthesis of tortuosity and dispersion in effective thermal conductivity of porous media [J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2010, 53 (15/16): 3222.
- [4] MOLDRUP P, DEEPAGODA T K K C, HAMAMOTO S, et al. Structure-dependent water-induced linear reduction model for predicting gas diffusivity and tortuosity in repacked and intact soil [J]. *Vadose Zone Journal*, 2013, 12(3): 1.
- [5] BONILLA M R, BHATIA S K. Diffusion in pore networks: effective self-diffusivity and the concept of tortuosity [J]. *Journal of Physical Chemistry C*, 2013, 117(7): 3343.
- [6] DEEPAGODA T K K C, MOLDRUP P, SCHJONNING P, et al. Variable pore connectivity model linking gas diffusivity and air-phase tortuosity to soil matric potential [J]. *Vadose Zone Journal*, 2012, 11(1): 120.
- [7] CECEN A, WARGO E A, HANNA A C, et al. 3-D microstructure analysis of fuel cell materials: spatial distributions of tortuosity, void size and diffusivity [J]. *Journal of the Electrochemical Society*, 2012, 159(3): 299.
- [8] ATTIA A M. Effects of petrophysical rock properties on tortuosity factor [J]. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 2005, 48 (3): 185.
- [9] BOUDREAU B P. The diffusive tortuosity of fine-grained unlithified sediments [J]. *Geochimica ET Cosmochimica Acta*, 1996, 60(16): 3139.
- [10] SEN P, SCALA C, COHEN M. A self-similar model for sedimentary rocks with application to the dielectric constant of fused glass beads [J]. *Geophysics*, 1981, 46(5): 781.
- [11] KOPONEN A, KATAJA M, TIMONEN J. Tortuous flow in porous media [J]. *Physical Review*

- E, 1996, 54(1): 406.
- [12] KOPONEN A, KATAJA M, TIMONEN J. Permeability and effective porosity of porous media [J]. *Physical Review E*, 1997, 56(3): 3319.
- [13] Westhuizen J, Du Plessis J P. Quantification of unidirectional fiber bed permeability [J]. *Journal of Composite Materials*, 1994, 28(7): 619.
- [14] YU B M, LI J H. A geometry model for tortuosity of flow path in porous media [J]. *Chinese Physics Letters*, 2004, 21(8): 1569.
- [15] WU M J, YU B M, ZHANG B, et al. A geometry model for tortuosity of streamtubes in porous media with spherical particles [J]. *Chinese Physics Letters*, 2005, 22(6): 1464.
- [16] YUN M, YU B, XU P, et al. Geometrical models for tortuosity of streamlines in three-dimensional porous media [J]. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, 2006, 84(3): 301.
- [17] KOU J L, TANG X M, ZHANG H Y, et al. Tortuosity for streamlines in porous media [J]. *Chinese Physics B*, 2012, 21(4): 364.
- [18] 郁伯铭. 多孔介质输运性质的分形分析研究进展 [J]. *力学进展*, 2003(3): 333.
- [19] 陈永平, 施明恒. 基于分形理论的多孔介质导热系数研究 [J]. *工程热物理学报*, 1999(5): 608.
- [20] LI J H, YU B M. Tortuosity of flow paths through a Sierpinski Carpet [J]. *Chinese Physics Letters*, 2011, 28(3): 1.
- [21] DULLIEN F. Porous media: fluid transport and pore structure [M]. New York: Academic Press, 1979.
- [22] MANDELBROT B B. The fractal geometry of nature [M]. New York: W H Freeman and Company, 1982.

(上接第 62 页)

- [6] SCHMID H, SIGEL S, PASTRE M, et al. An internally non-linear ADC for a Sigma Delta accelerometer loop [C] // *Proceedings of 2010 IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, Piscataway: IEEE, 2010: 2155.
- [7] 王隽骧, 严士健, 刘秀芳. 概率论基础 [M]. 北京: 科学出版社, 2007.
- [8] COVER T M, THOMAS J A. Elements of information theory [M]. New York: Wiley-Interscience, 1991.
- [9] BREIMAN L. The individual ergodic theorems of information theory [J]. *Ann Math Stat*, 1957, 28: 809.
- [10] MOY S C. Generalization of Shannon-McMillan theorem [J]. *Pacific Journal of Mathematics*, 1961(11): 705.
- [11] KIEFFER J C. A simple proof of the Moy-Perez generalization of the Shannon-McMillan theorem [J]. *Pacific J Math*, 1974, 51: 203.
- [12] OREY S. On the Shannon-Perez-Moy theorem [J]. *Contemp Math*, 1985, 41: 319.
- [13] 孙传友. 现代检测技术及仪表 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.