**引用格式**:岳毅蒙. 带约束的 Markov-modulated 风险模型最优分红和注资策略[J]. 轻工学报,2016,31(5):105-108.

**中图分类号**:O211.6;F840 **文献标识码**:A

**DOI**:10.3969/j.issn.2096-1553.2016.5.018

**文章编号**:2096-1553(2016)05-0105-04

# 带约束的 Markov-modulated 风险模型最优分红和注资策略

# Optimal dividends and capital injections strategy in a Markov-modulated risk model with restricted densities

**关键词**:
Markov-modulated 风险模型随机控制;HJB 方程;注资策略;分红策略

**Key words**:
Markov-modulated risk model stochastic control;HJB equation;capital injection strategy;dividend strategy

岳毅蒙
YUE Yi-meng

商洛学院 数学与计算机应用学院,陕西 商洛 726000
*School of Mathematics and Computer Application, Shangluo University, Shangluo* 726000, *China*

**摘要**:在考虑 Markov-modulated 风险模型分红约束和交易费用的基础上,以股东的折现分红减去折现注资之差的期望值最大为目标,讨论了模型的最优分红和注资策略问题. 由随机控制理论建立 HJB 方程,得到相应的最优策略为 Threshold 策略.

**收稿日期**:2015-07-10

**基金项目**:陕西省自然科学基础研究计划项目(2013JM1023);陕西省教育科学"十二五"规划课题(SGH13406);商洛学院科研项目(15SKY011)

**作者简介**:岳毅蒙(1984—),男,陕西省富平县人,商洛学院讲师,硕士,主要研究方向为金融数学和保险精算.

**Abstract**: Considering control of dividends and capital injections of the Markov-modulated risk model with restricted densities and transaction costs, with maximizing the discounted dividend payments minus the penalized discounted capital injections as the goal, the optimal dividends and capital injections strategy was discussed. By stochastic control theory and the Hamilton-Jacobi-Bellman equation, it was derived that the corresponding best strategy was Threshold strategy.

## 0　引言

Markov-modulated 风险模型是针对随机环境下的风险而建立的,是经典风险模型的推广.很多文献从不同角度对此模型进行了讨论,文献[1-4]研究了马氏环境下风险模型的破产问题,文献[5-8]在原有基础上对模型进行了推广,讨论了带扩散、带收税、带投资、保费率交替变化的马氏调制风险模型.文献[9-12]研究了马氏调制风险模型的最优分红、再保险等相关问题.受以上文献启发,本文拟讨论带分红约束的 Markov-modulated 风险模型的最优分红和注资策略问题,以期为保险公司的分红和注资提供相应的理论指导.

## 1　模型构建

定义$\{J(t);t\geqslant 0\}$是一个齐次的、不可约的、周期的、具有有限状态空间 $S=\{1,2,\cdots,m\}$ 的外部马尔可夫过程,其密度矩阵 $\boldsymbol{Q}_{ij}=(q_{ij})_{i,j=1}^{m}$,其中 $q_{ij}=-q_i=-\sum\limits_{i\neq j}q_{ij},i\in S$. 记其唯一平稳概率分布为 $\boldsymbol{\pi}=(\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_m)$,若记$\{W_n\}_{n\geqslant 0}$表示环境过程发生第 $n$ 次转移的时间$\{W_0\}=0$,则内嵌的马尔可夫链$\{J_{W_n}\}_{n\geqslant 0}$的转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P}=(p_{ij})_{i,j=1}^{m}$$

其中

$$p_{ij}=\begin{cases}\dfrac{q_{ij}}{q_i} & i\neq j\\ 0 & i=j\end{cases}\qquad i,j\in S$$

则对于所有 $n\geqslant 0,s\in R_+$ 及 $i\in S$ 下式成立:

$$\mathscr{P}[W_{n+1}-W_n\leqslant s,J_{W_{n+1}}=j|J_{W_n}=i]=(1-e^{-q_is})p_{ij}$$

给定 $J_t=i$,对应的索赔次数$\{N_t^i\}_{t\geqslant 0}$服从强度为 $\lambda_i$ 的 Poisson 分布,分布函数为 $G_i$,均值为 $\mu_i$,第 $n$ 次索赔总额和到达时刻分别记为 $Y_n$ 和 $T_n(Y_0=0,T_0=0)$,假设$\{Y_n\}_{n\in N}$和$\{T_n-T_{n-1}\}_{n\in N}$相互独立. 过程$\{N_t\}_{t\geqslant 0}$被称为 Markov-modulated 泊松风险模型,它是一类特殊的 Cox 过程,可以看作参数受外部环境过程$\{J(t);t\geqslant 0\}$控制的 Poisson 过程.其中 $N_t=\sum\limits_{i\in S}\int_0^t \mathrm{I}_{\{J_s=j\}}\mathrm{d}N_s^i$.

设初始资金为 $x$,相应的盈余过程可描述为

$$X_t=x+C_t-\sum_{n=1}^{N_t}Y_n\qquad t\geqslant 0$$

其中,$C_t=\int_0^t c_{J_s}\mathrm{d}s=\sum\limits_{i\in S}\int_0^t \mathrm{I}_{\{J_s=i\}}c_i\mathrm{d}s$.

假设所有随机变量和随机过程都是定义在概率空间$(\Omega,F,\{F\}_{t\geqslant 0},\mathscr{P})$,其中$\{F\}_{t\geqslant 0}$是由$\{(X_t,J_t)\}_{t\geqslant 0}$产生的最小右连续滤子,则$\{(X_t,J_t)\}_{t\geqslant 0}$是一个齐次逐段马尔科夫过程.

在原模型基础上引入策略$\{(D_t,Z_t)\}$,其中$\{D_t\}$为从 0 时刻到 $t$ 时刻的累积分红,$\{Z_t\}$为从 0 时刻到 $t$ 时刻的累积注资.一个策略若满足以下两个条件,则称为可行策略:

1)$\{D_t\}$是右连左极的,增的适应的过程,且满足 $D_{0-}=0$;

2)$\{Z_t\}$是左连右极的,增的适应的过程,且满足 $Z_0=0$.

则盈余过程转化为

$$X_t^{(D,Z)}=X_t-D_t+Z_t\qquad X_0^{(D,Z)}=x$$

策略$(D,Z)=\{(D_t,Z_t)\}_{t\geqslant 0}$的值定义为

$$V^{D,Z}(x) = E_x\left[\beta\int_{0-}^{T^\pi} e^{-\delta t}\mathrm{d}D_t - \varphi\int_{0-}^{T^\pi} e^{-\delta t}\mathrm{d}Z\right]$$

其中,分红交易费用的比例因子 $\beta < 1$,折扣因子 $\delta > 0$,罚金因子 $\varphi > 1$. 我们的目标是最大化 $V^{D,Z}(x)$, 故定义值函数为 $V(x) = \sup\limits_{(D,Z)\in S_{(x,i)}} V^{(D,Z)}(x,i)$.

这里我们考虑有约束的分红策略,即假设分红率为 $U_t$,且 $D_t = \int_0^t U_s \mathrm{d}s, 0 \leqslant U_t \leqslant u_0 < \infty$, $U_t$ 表示策略 $\{U_t\}$,则

$$V^U(x,i) = E_{(x,i)}\left[\beta\int_0^\infty e^{-\delta t}U_t\mathrm{d}t - \varphi\int_{0-}^\infty e^{-\delta t}\mathrm{d}Z_t\right]$$

那么最大化值函数的目标即为 $V(x,i) = \sup\limits_{U\in S(x,i)} V^U(x,i)$.

## 2 值函数的性质与 HJB 方程

**引理 1** 对所有 $i \in S$,值函数 $V(x,i)$ 是凹的.

**引理 2** 在任意分红策略下,值函数的下界为 $-\varphi\bar{\lambda}\bar{\mu}/\delta$. 其中 $\bar{\lambda}$ 表示 $\max\limits_{i\in S}\lambda_i$, $\bar{\mu}$ 表示 $\max\limits_{i\in S}\mu_i$.

**引理 3** 对所有 $i \in S, V(\cdot,i)$ 上是有界的、增的、Lipschitz 连续的函数.

**引理 4** 矩阵 $\delta\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q}$ 是可逆的.

**定理 1** 对所有 $i \in S$,函数 $V(\cdot,i)$ 在 $[0, +\infty)$ 上几乎处处可微,由左右可导得到 HJB 方程:

$$\sup_{0\leqslant u\leqslant u_0}\{(c_i - u)V'(x,i) + \beta u - (\lambda_i + \delta)V(x,i) + \lambda_i\int_0^\infty V(x-y,i)\mathrm{d}G_i(y) + \sum_{j\in S} q_{ij}V(x,j)\} = 0 \quad ①$$

现令

$$u(x,i) = \begin{cases} 0 & \text{若 } V'(x) > \beta \\ \min[c_i, u_0] & \text{若 } V'(x) = \beta \\ u_0 & \text{若 } V'(x) < \beta \end{cases} \quad ②$$

则受策略 $\{U_t\} = \{u(X_t^U, J_t)\}$ 控制的盈余过程转化为

$$X_t^U = x + \int_0^t (c_{J_s} - U_s)\mathrm{d}s - \sum_{n=1}^{N_t} Y_n + Z_t = x + \int_0^t (c_{J_s}\mathrm{I}_{\{X_{s-}^U < b_{J_s}\}} + (cJ_s - u_0)\mathrm{I}_{\{X_{s-}^U \geqslant b_{J_s}\}})\mathrm{d}s - \sum_{n=1}^{N_t} Y_n + Z_t$$

## 3 最优策略

**引理 5** 对于 $i \in S$,令 $f(x,i)$ 是增的、有界的,是 HJB 方程的正解,则对任意一个可行策略 $U$,过程

$$\{f(X_t^U, J_t)e^{-\delta t} - f(X_0^U, J_0) - \varphi\int_0^t e^{-\delta s}\mathrm{d}Z_s - \int_0^t [(c_{J_s} - U_s)f'(X_s^U, J_s) - (\lambda_{J_s} + \delta)f(X_s^U, J_s) + \lambda_{J_s}\int_0^\infty f(X_s^U - y, J_s)\mathrm{d}G_{J_s}(y) + \sum_{j\in S} q_{J_s j} f(X_s^U, j)]e^{-\delta s}\mathrm{d}s\}$$

是一个鞅.

**定理 2** 对于 $i \in S$,设 $f(x,i)$ 是增的、有界的,是 HJB 方程的正解,那么 $f(x,i) = V(x,i)$,最优策略由 ② 给出,为 Threshold 策略.

**证明** 因令 $f(x,i)$ 有界,假设 $f(x,i)$ 收敛到 $f(\infty,i) < \infty$,令 $x_n$ 是一列点使得 $f'(x_n,i) \to 0$,令 $u_n = u(x_n,i)$. 从最优策略的定义可以假设 $u_u = u_0$. 令 $n \to \infty$,则 ① 式变为

$$0 = (c_i - u_0)f'(x_n,i) + \lambda[f(x_n - y,i)\mathrm{d}G_i(y) - f(x_n,i)] + \sum_{j\in S, j\neq i} q_{ij}f(x_n,j) + (q_{ij} - \delta)f(x_n,i) + \beta u_0 \xrightarrow{n\to\infty} \sum_{j\in S,j\neq i} q_{ij}f(\infty,j) + (q_{ij} - \delta)f(\infty,i) + \beta u_0$$

记 $f(\infty) = (f(\infty,1)\cdots,f(\infty,m))^T$. 那么 $f(\infty)$ 是 $(\delta\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})f(\infty) = u_0 e$ 的一个解.

令由式 ② 给出策略为 $U^*$,则相应的 $Z^* = Z^{U^*}$,由引理 5 可得

$$\{f(X_t^U, J_t)e^{-\delta t} - f(x,i) + \beta\int_0^t e^{-\delta s}U_s^*\mathrm{d}s - \varphi\int_0^t e^{-\delta s}\mathrm{d}Z_s^*\}$$

是一个期望为 0 的鞅,所以

$$f(x,i) = E_{(x,i)}[f(X_t^{U^*},J_t)e^{-\delta t} + \beta\int_0^t e^{-\delta s}U_s^* \mathrm{d}s - \varphi\int_0^t e^{-\delta s}\mathrm{d}Z_s^*]$$

又因 $f$ 是有界的,由有界收敛定理可知 $E_{(x,i)}[f(X_t^{U^*},J_t)e^{-\delta t}]\to 0(t\to\infty)$ 成立. 另其他项单调,将积分与极限运算交换顺序,得到 $f(x,i) = V^{U^*}(x,i)$,对任意策略 $U$,由 HJB 方程可知

$$f(x,i) \geqslant E_{(x,i)}[f(X_t^U,J_t)e^{-\delta t} + \beta\int_0^t e^{-\delta s}U_s\mathrm{d}s - \varphi\int_0^t e^{-\delta s}\mathrm{d}Z_s] \geqslant E_{(x,i)}[\beta\int_0^t e^{-\delta s}U_s\mathrm{d}s - \varphi\int_0^t e^{-\delta s}\mathrm{d}Z_s]$$

当 $t\to\infty$ 时,$f(x,i) \geqslant V^U(x,i)$,即得 $f(x,i) = V(x,i)$.

综上所述,如果在 $t$ 时刻的环境过程的状态为 $i$,则对股东而言最优策略是当盈余小于分红限 $b$ 时,不需要对其采取分红和注资;当过程到达或超过了分红限 $b$ 时,则以最大分红率 $u_0$ 对股东进行分红.

## 4 结语

本文针对 Markov-modulated 风险模型的最优分红和注资策略进行了研究,考虑在分红约束和交易费用的情况下,利用随机控制理论求解出最优策略为 Threshold 策略,为相关理论的研究奠定了一定的理论基础.

**参考文献:**

[1] BAUERLE N. Some results about the expected ruin time in Markov-modulated risk models[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 1996, 18:119.

[2] LU Y, LI S. On the probability of ruin in a Markov-modulated risk model[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2005, 37(3):522.

[3] ZHANG X. On the ruin problem in a Markov-modulated risk model[J]. Methodology and Computing in Applied Probability, 2008, 10(2):225.

[4] ZHU J, YANG H. Ruin probabilities of a dual Markov-modulated risk model[J]. Communications in Statistics—Theory and Methods, 2008, 37(20):3298.

[5] LU Y, TSAI C C L. The expected discounted penalty at ruin for a Markov-modulated risk process perturbed by diffusion[J]. North American Actuarial Journal, 2007, 11(2):136.

[6] WEI J, YANG H, WANG R. On the Markov-modulated insurance risk model with tax[J]. Blätter der DGVFM, 2010, 31(1):65.

[7] KÖTTER M, BÄUERLE N. The Markov-modulated Risk Model with Investment[M]. Springer Berlin Heidelberg, 2007:575.

[8] LI S P, BAI Z W, MA C Y, et al. Markov modulated risk model with alternative premium rate[J]. Journal of Systems Engineering, 2011, 26(6):752.

[9] LI S, LU Y. Some optimal dividend problems in a markov-modulated risk model[J]. Insurance Mathematics and Economics, 2006, 39(3):423.

[10] WEI J, YANG H, WANG R. Optimal reinsurance and dividend strategies under the Markov-modulated insurance risk model[J]. Stochastic Analysis and Applications, 2010, 28(6):1078.

[11] LI S, LU Y. Moments of the dividend payments and related problems in a Markov-modulated risk model[J]. North American Actuarial Journal, 2007, 11(2):65.

[12] ANDRONOV A, GERTSBAKH I B. Signatures in Markov-modulated processes[J]. Stochastic Models, 2014, 30(1):1.