



引用格式:程春蕊,李庆宾,毛北行. 一类分数阶系统的有限时间混沌同步[J]. 轻工学报, 2017,32(4):100-104.

中图分类号:O482.4 文献标识码:A

DOI:10.3969/j.issn.2096-1553.2017.4.015

文章编号:2096-1553(2017)04-0100-05

一类分数阶系统的有限时间混沌同步

Finite-time chaos synchronization control of a class of fractional order systems

程春蕊,李庆宾,毛北行

CHENG Chun-ruì, LI Qing-bin, MAO Bei-xing

关键词:

混沌系统;分数阶;有限时间混沌同步

郑州航空工业管理学院 理学院,河南 郑州 450046

College of Science, Zhengzhou University of Aeronautics, Zhengzhou 450046, China

Key words:

chaos system; fractional order; finite-time; chaos synchronization

摘要:基于 Lyapunov 稳定性理论和分数阶微积分的相关理论,研究了一类分数阶系统的有限时间混沌同步,得到了主从系统有限时间快速同步的两个充分条件.数值仿真结果证明了该方法的有效性.

收稿日期:2016-07-23;修回日期:2017-03-09

基金项目:国家自然科学基金青年基金项目(11501525);河南省高等学校重点科研项目(16B110014;17A110034);郑州航空工业管理学院青年科研基金项目(2014113002;2015113001)

作者简介:程春蕊(1981—),女,山东省曹县人,郑州航空工业管理学院讲师,主要研究方向为复杂网络与混沌同步.

Abstract: The finite-time synchronization control problem of a class of fractional order chaos system was studied based on Lyapunov stability theory and fractional order system theory. Two sufficient conditions for fast synchronization of master-slave systems were gotten. Numerical simulation result verified the effectiveness of the proposed method.

0 引言

最近 20 年来,分数阶混沌系统逐步成为研究的热点^[1-6],现实应用中,混沌系统在有限时间内达到快速同步更具实际意义和挑战性. 辛道义等^[7]研究了一类非线性系统的有限时间稳定性问题;杨仁明等^[8]研究了一类非线性时滞系统的有限时间稳定性;李洁等^[9]研究了混沌系统的快速收敛有限时间滑模自适应控制问题;P. A. Mohammad^[10]研究了一类分数阶不确定系统的有限时间鲁棒混沌同步问题,给出了控制律的设计和实现快速同步的条件;毛北行等^[11-12]研究了一类复杂网络系统的有限时间混沌同步问题和一类具有非线性耦合的复杂网络混沌系统的有限时间混沌同步问题. 但上述文献研究的都是整数阶混沌系统,有关分数阶混沌系统的有限时间混沌同步问题研究较少. 鉴于此,本文拟研究一类分数阶混沌系统的有限时间混沌同步,基于 Lyapunov 稳定性理论和分数阶微积分的相关理论,证明主从系统有限时间快速同步的两个充分条件,并用数值仿真验证方法的有效性.

1 分数阶混沌系统的有限时间同步

定义 1^[13] Caputo 分数阶导数定义为

$${}_c D_{t_0,t}^\alpha = D_{t_0,t}^{-(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} x(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} x^{(n)}(\tau) d\tau$$

$$n-1 < \alpha < n \in Z^+$$

研究如下分数阶混沌系统:

$$D^\alpha x(t) = Ax(t) + f(x(t), t) \quad (1)$$

其中, $\alpha \in (0, 1)$, $f(x(t), t)$ 是一般的非线性函

数, $x(t) \in R^n$ 为系统状态, 将上述系统作为主系统, 从系统设计为

$$D^\alpha y(t) = Ay(t) + f(y(t), t) + u(t) \quad (2)$$

其中, $u(t)$ 为控制输入. 定义误差变量 $e(t) = y(t) - x(t)$, (2) 式减去 (1) 式得到误差系统方程

$$D^\alpha e(t) = Ae(t) + f(y(t), t) - f(x(t), t) + u(t) \quad (3)$$

引理 1^[14] $x_i \in R, i = 1, 2, \dots, n, 0 < p \leq 1$ 为实数, 则下述不等式成立:

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i| \right)^p \leq \sum_{i=1}^n (|x_i|)^p$$

定理 1 设

$$u(t) = -Ae(t) + f(x(t), t) - f(y(t), t) - D^{\alpha-1} [ke(t) + l|e(t)|^\mu \operatorname{sgn}(e(t))]$$

则误差系统 (3) 的轨迹将在有限时间 T 内收敛至坐标原点, 其中

$$T \leq \frac{1}{\rho(1-\mu)} \ln \left(\frac{\rho \|e(0)\|_1^{1-\mu} + v}{v} \right)$$

证明 设 Lyapunov 函数 $V(t) = \|e(t)\|_1$, 求得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \operatorname{sgn}^T(e(t)) \dot{e}(t) = \operatorname{sgn}^T(e(t)) D^{1-\alpha} (D^\alpha e(t)) = \\ &= \operatorname{sgn}^T(e(t)) D^{1-\alpha} [Ae(t) + f(y(t), t) - f(x(t), t) + u(t)] \leq \\ &= -\operatorname{sgn}^T(e(t)) D^{1-\alpha} [D^{\alpha-1} [ke(t) + l|e(t)|^\mu \operatorname{sgn}(e(t))]] \end{aligned}$$

因为 $e(t) \neq 0$ 时, $\operatorname{sgn}^T(e(t)) \operatorname{sgn}(e(t)) = 1$, 故有

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq (k|e(t)| + l|e(t)|^\mu) \Rightarrow \dot{V} \leq \\ &= - \left(\sum_{i=1}^n k_i |e_i| + \sum_{i=1}^n l_i |e_i|^\mu \right) \end{aligned}$$

由引理 1 得到

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\left(\rho \sum_{i=1}^N |e_i| + v\left(\sum_{i=1}^N |e_i|\right)^\mu\right) = \\ &-\rho \|e(t)\|_1 - v \|e(t)\|_1^\mu \leq -\rho \|e(t)\|_1 \end{aligned}$$

其中, $\rho = \min\{k_i(i = 1, 2, \dots, N)\}$, $v = \min\{l_i(i = 1, 2, \dots, N)\}$.

由上述不等式得到

$$\dot{V}(t) = \frac{d \|e(t)\|_1}{dt} \leq$$

$$-\rho \|e(t)\|_1 - v \|e(t)\|_1^\mu$$

故有

$$\begin{aligned} dt &\leq \frac{-d \|e(t)\|_1}{\rho \|e(t)\|_1 + v \|e(t)\|_1^\mu} = \\ &-\frac{\|e(t)\|_1^{-\mu} \cdot d \|e(t)\|_1}{\rho \|e(t)\|_1^{1-\mu} + v} = \\ &-\frac{1}{1-\mu\rho} \frac{d \|e(t)\|_1^{1-\mu}}{\|e(t)\|_1^{1-\mu} + v} \end{aligned} \quad (4)$$

对④式两边从0到T积分, $e(T) = 0, T = \max\{t_i(i = 1, 2, \dots, N)\}$, 得

$$\begin{aligned} T &\leq -\frac{1}{1-\mu} \int_{e(0)}^{e(T)} \frac{d \|e(t)\|_1^{1-\mu}}{\rho \|e(t)\|_1^{1-\mu} + v} = \\ &-\frac{1}{\rho(1-\mu)} \ln[\rho \|e(t)\|_1^{1-\mu} + v] \Big|_{e(0)}^{e(T)} = \\ &\frac{1}{\rho(1-\mu)} \ln\left(\frac{\rho \|e(0)\|_1^{1-\mu} + v}{v}\right) \end{aligned}$$

证毕.

2 分数阶不确定混沌系统的有限时间同步

以下研究分数阶不确定混沌系统:

$$D^\alpha x(t) = Ax(t) + f(x(t), t) + \Delta f(x(t), t) \quad (5)$$

将系统⑤作为主系统,设计从系统为

$$D^\alpha y(t) =$$

$$Ay(t) + f(y(t)) + \Delta f(y(t), t) + u(t)$$

得到误差系统方程为

$$\begin{aligned} D^\alpha e(t) &= Ae(t) + f(y(t), t) - f(x(t), t) + \\ &\Delta(f(y(t), t) - f(x(t), t)) + u(t) \end{aligned} \quad (6)$$

假设 1 $\|D^{1-\alpha}(\Delta f(y(t), t) - \Delta f(x(t), t))\| \leq \gamma$, 其中 γ 为 > 0 的常数.

定理 2 设

$$u(t) = -Ae(t) + f(x(t)) - f(y(t)) - D^{\alpha-1}[ke(t) + (\gamma + l|e(t)|^\mu) \text{sgn}(e(t))]$$

则误差系统⑥的轨迹将在有限时间T内收敛至坐标原点, 其中

$$T \leq \frac{1}{\rho(1-\mu)} \ln\left(\frac{\rho \|e(0)\|_1^{1-\mu} + v}{v}\right)$$

证明 设 Lyapunov 函数 $V(t) = \|e(t)\|_1$, 求导得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \text{sgn}^T(e(t))\dot{e}(t) = \\ &\text{sgn}^T(e(t))D^{1-\alpha}(D^\alpha e(t)) = \\ &\text{sgn}^T(e(t))D^{1-\alpha}[Ae(t) + f(y(t), t) - \\ &f(x(t), t) + \Delta(f(y(t), t) - \\ &f(x(t), t)) + u(t)] \leq \\ &\text{sgn}^T(e(t))\gamma - \text{sgn}^T(e(t))D^{1-\alpha}[D^{\alpha-1}[ke(t) + \\ &(\gamma + l|e(t)|^\mu) \text{sgn}(e(t))]] \end{aligned}$$

因为 $e(t) \neq 0$ 时, $\text{sgn}^T(e(t)) \text{sgn}(e(t)) = 1$, 故有

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -(k|e(t)| + l|e(t)|^\mu) \Rightarrow \dot{V} \leq \\ &-\left(\sum_{i=1}^N k_i |e_i| + \sum_{i=1}^N l_i |e_i|^\mu\right) \end{aligned}$$

由引理1可得

$$V \leq -\left(\rho \sum_{i=1}^N |e_i| + v\left(\sum_{i=1}^N |e_i|\right)^\mu\right) =$$

$$-\rho \|e(t)\|_1 - v \|e(t)\|_1^\mu \leq -\rho \|e(t)\|_1$$

其中, $\rho = \min\{k_i(i = 1, 2, \dots, N)\}$, $v = \min\{l_i(i = 1, 2, \dots, N)\}$.

以下证明同定理1, 略.

3 数值仿真

以分数阶 Lorenz 系统为例:

$$\begin{cases} D_t^\alpha x_1 = a(x_2 - x_1) \\ D_t^\alpha x_2 = bx_1 - x_1x_3 - x_2 \\ D_t^\alpha x_3 = x_1x_2 - cx_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} D_t^\alpha y_1 = a(y_2 - y_1) + u_1 \\ D_t^\alpha y_2 = by_1 - y_1 y_3 - y_2 + u_2 \\ D_t^\alpha y_3 = y_1 y_2 - cy_3 + u_3 \end{cases}$$

其误差方程为

$$\begin{cases} D_t^\alpha e_1 = a(e_2 - e_1) + u_1 \\ D_t^\alpha e_2 = be_1 - y_1 y_3 + x_1 x_3 - e_2 + u_2 \\ D_t^\alpha e_3 = y_1 y_2 - x_1 x_2 - ce_3 + u_3 \end{cases}$$

其中, a, b, c 为参数, 当 $\alpha = 0.93, a = 10, b = 28, c = 8/3$ 时系统呈现混沌态.

$$A = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 28 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -8/3 \end{bmatrix}$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -x_1 x_3 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix} \quad f(y) = \begin{bmatrix} 0 \\ -y_1 y_3 \\ y_1 y_2 \end{bmatrix}$$

依据定理 1 设计控制器

$$u(t) = -Ae(t) + f(x(t), t) - f(y(t), t) - D^{\alpha-1} [ke(t) + l|e(t)|^\mu \text{sgn}(e(t))]$$

其中, $l = 1.5, k = 1.5, \gamma = 0.5, \mu = 0.95$, 初始状态值 $(e_1(0), e_2(0), e_3(0)) = (2, 1, 1)$, 系统误差如图 1 所示.

定理 2 以如下系统为例:

$$\begin{cases} D_t^\alpha x_1 = a(x_2 - x_1) + \Delta f_1 \\ D_t^\alpha x_2 = bx_1 - x_1 x_3 - x_2 + \Delta f_2 \\ D_t^\alpha x_3 = x_1 x_2 - cx_3 + \Delta f_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} D_t^\alpha y_1 = a(y_2 - y_1) + \Delta f_1 + u_1 \\ D_t^\alpha y_2 = by_1 - y_1 y_3 - y_2 + \Delta f_2 + u_2 \\ D_t^\alpha y_3 = y_1 y_2 - cy_3 + \Delta f_3 + u_3 \end{cases}$$

其误差方程为

$$\begin{cases} D_t^\alpha e_1 = a(e_2 - e_1) + \Delta f(y_1) - \Delta f(x_1) + u_1 \\ D_t^\alpha e_2 = be_1 - y_1 y_3 + x_1 x_3 - e_2 + \Delta f_2(y_2) - \Delta f_2(x_2) + u_2 \\ D_t^\alpha e_3 = y_1 y_2 - x_1 x_2 - ce_3 + \Delta f_3(y_3) - \Delta f_3(x_3) + u_3 \end{cases}$$

其中, $\Delta f_1 = -0.1 \sin(4t)x_1, \Delta f_2 = 0.1 \cdot \sin(3t)x_2, \Delta f_3 = 0.15 \sin(t)x_3$.

依据定理 2 设计控制器

$$u(t) = -Ae(t) + f(x(t)) - f(y(t)) - D^{\alpha-1} [ke(t) + (\gamma + l|e(t)|^\mu) \text{sgn}(e(t))]$$

其中, $l = 2, k = 2, \gamma = 0.5, \mu = 0.95, (e_1(0), e_2(0), e_3(0)) = (1, 1, 2)$, 系统误差如图 2 所示.

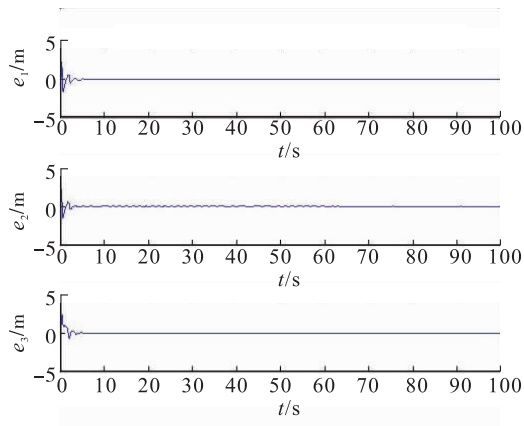


图 1 定理 1 中的系统误差

Fig. 1 The system errors of theorem 1

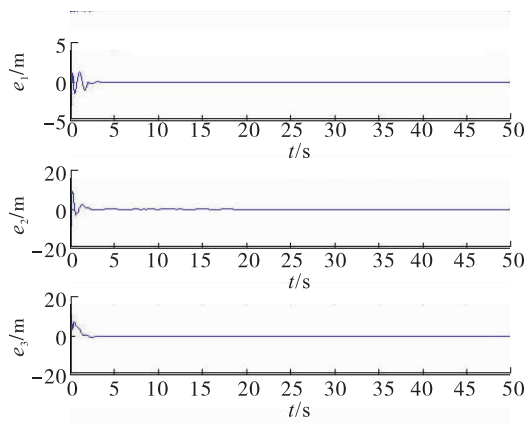


图 2 定理 2 中的系统误差

Fig. 2 The system errors of theorem 2

从图 1 和图 2 可以看出, 初始时刻系统的误差变量距离原点较远, 随时间变化逐渐趋于一致, 且逐渐趋近于坐标原点, 表明主从系统取得了混沌同步. 由图 1 可知, 当 $t > 0.200$ s, 系统误差曲线逐渐趋近于坐标原点; 由图 2 可知, 当 $t > 0.275$ s, 系统误差曲线逐渐趋近于坐标原点, 表明两个误差系统都在有限时间内取得同

步. 因为定理 2 中的系统较定理 1 中的系统更复杂, 因此对应的误差系统取得同步所需时间更长.

4 结语

本文研究了一类分数阶混沌系统的有限时间混沌同步, 得到了系统取得快速同步的条件. 数值仿真结果表明, 该条件下分数阶混沌系统能够实现快速同步. 分数阶混沌系统的有限时间滑模控制是进一步需要研究的问题.

参考文献:

[1] 仲启龙, 邵永辉, 郑永爱. 分数阶混沌系统的主动滑模同步[J]. 动力学与控制学报, 2015, 13(1):18.

[2] 胡玉婷, 李东, 张兴鹏. 参数未知的分数阶混沌系统的自适应追踪控制[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版), 2015, 32(3):1.

[3] 杨丽新, 江俊. 分数阶复杂网络系统的混合投影同步[J]. 动力学与控制学报, 2015, 13(1):52.

[4] 胡建兵, 赵灵东. 分数阶稳定性理论与控制研究[J]. 物理学报, 2013, 62(24):41.

[5] 陈荣旺, 许碧荣. 非线性耦合分数阶系统的异结构同步[J]. 集美大学学报(自然科学版), 2014, 19(5):381.

[6] 郝建红, 宾虹, 姜苏娜, 等. 分数阶线性系统稳定性理论在混沌同步中的简便应用[J]. 河北

师范大学学报(自然科学版), 2014, 38(5):469.

[7] 辛道义, 刘允刚. 非线性系统有限时间稳定性分析与控制设计[J]. 山东大学学报(工学版), 2011, 41(2):119.

[8] 杨仁明, 王玉振. 一类非线性时滞系统的有限时间稳定性[J]. 山东大学学报(工学版), 2012, 42(2):36.

[9] 李洁, 吴忠强. 混沌系统的快速收敛有限时间滑模自适应控制[J]. 自动化仪表, 2009, 11(3):34.

[10] MOHAMMAD P A. Robust finite-time stabilization of fractional-order chaotic susyems based on fractional Lyapunov stability theory[J]. Journal of Computation and Nonlinear Dynamics, 2012, 7:1011.

[11] 毛北行, 王东晓. 一类复杂网络系统的有限时间混沌同步[J]. 华中师范大学学报(自然科学版), 2015, 49(4):538.

[12] 毛北行, 张玉霞. 具有非线性耦合复杂网络系统的有限时间混沌同步[J]. 吉林大学学报(理学版), 2015, 53(4):757.

[13] PODLUBNY L. Fractional differential equation [M]. San Diego:Academic Press, 1999.

[14] HARDY G, LITTLEWOOD J E, POLYA G. Inequalities[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1952.