轻工学报® 2018 年 7 月 第 33 卷 第 4 期
JOURNAL OF LIGHT INDUSTRY Vol. 33 No. 4 Jul. 2018

引用格式:张树义,刘冬红,丛培根. 非扩张半群与变分不等式公共解的黏滞迭代逼近[J]. 轻工学报,2018,33(4):86 - 100.

中图分类号:O177.91 **文献标识码:**A

DOI:10.3969/j.issn.2096 - 1553.2018.04.012

文章编号:2096 - 1553(2018)04 - 0086 - 15

非扩张半群与变分不等式公共解的黏滞迭代逼近

Viscosity iterative approximation of common solutions for nonexpansive semigroups and variational inequalities

关键词:
非扩张半群;变分不等式;隐式和显式黏滞迭代算法;可逆 - 强单调

Key words:
nonexpansive semigroups;
variational inequality;
implicit and explicit viscous iterative algorithms;
inverse-strongly monotone

张树义,刘冬红,丛培根
ZHANG Shuyi, LIU Donghong, CONG Peigen

渤海大学 数理学院,辽宁 锦州 121013
College of Mathematics and Physics, Bohai University, Jinzhou 121013, China

摘要:使用非扩张半群隐式和显式黏滞迭代算法,在 Hilbert 空间中建立了非扩张半群的公共不动点集与具有强单调映象的变分不等式解集的公共元素的强收敛定理,从而推广和改进了相关文献中的结果.

收稿日期:2017 - 07 - 02

基金项目:国家自然科学基金项目(11371070)

作者简介:张树义(1960—),男,辽宁省锦州市人,渤海大学教授,主要研究方向为非线性泛函分析.

Abstract: Using the implicit and explicit viscous iterative algorithms for nonexpansive semigroups, convergence theorem of the common elements of the set of common fixed points of nonexpansive semigroups and the set of variational inequalities with a strongly monotone maps were established in Hilbert space, which generalized and improved the results in related literature.

变分不等式理论被广泛应用于运筹学与控制论、非线性规划、数理统计、优化理论、工程技术、经济模型等各个领域,而黏滞迭代也已被广泛用于非扩张映象不动点与变分不等式问题公共元素的求解方面. 为了寻找非空凸子集上非扩张映象的不动点集与强单调映射变分不等式解集的公共元素, 本文拟考虑更为一般的非扩张半群隐式和显式黏滞迭代算法,在 Hilbert 空间中建立非扩张半群的公共不动点集与具有强单调映象的变分不等式解集的公共元素的强收敛定理.

1 预备知识

设 H 是实 Hilbert 空间,其内积和范数分别表示为$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 和 $\|\cdot\|$,C 为 H 的非空闭凸子集,用 P_C 表示 H 到 C 上的度量投影. $\forall x,y\in H$,P_C 满足

$$\|P_Cx-P_Cy\|^2\leqslant\langle x-y,P_Cx-P_Cy\rangle \tag{①}$$

从而 P_C 是非扩张的,而且 $P_Cx\in C$ 有如下性质:$\langle x-P_Cx,P_Cx-z\rangle\geqslant 0,\forall z\in C$.

设 $A:C\to H$ 是非线性映象. 经典的变分不等式问题是寻求 $u\in C$,使得$\langle Au,v-u\rangle\geqslant 0$ 对 $\forall v\in C$ 成立,记为 $VI(C,A)$. 根据变分不等式问题,有

$$u\in VI(C,A)\Leftrightarrow u=P_C(u-\lambda Au),\forall\lambda>0$$

定义 1 如果 $\forall u,v\in C$,有$\langle Au-Av,u-v\rangle\geqslant 0$,则称 A 是单调的. 如果存在 $\alpha>0$,使得对 $\forall x,y\in C$,有$\langle x-y,Ax-Ay\rangle\geqslant\alpha\|Ax-Ay\|^2$,则称映象 A 是 α - 可逆 - 强单调的.

如果 B 是 C 到 H 上的 α - 可逆 - 强单调映象, 则 B 是$\frac{1}{\alpha}$ - Lipschitz 连续的. 对 $\forall x,y\in C$,$\lambda>0$,有

$$\|(I-\lambda B)x-(I-\lambda B)y\|^2\leqslant\|x-y\|^2+\lambda(\lambda-2\alpha)\|Bx-By\|^2 \tag{②}$$

若 $\lambda<2\alpha$,则 $I-\lambda B$ 是 C 到 H 内的非扩张映象.

定义 2 i) 映射 $S:C\to C$ 称为非扩张的,若 $\forall x,y\in C$,有 $\|Sx-Sy\|\leqslant\|x-y\|$,用 $F(S)$ 表示 S 的不动点集.

ii) 若存在常数 $\bar{\gamma}>0$,使得$\langle Ax,x\rangle\geqslant\bar{\gamma}\|x\|^2,\forall x\in C$,算子 A 称为强正的.

iii) 集值映象 $Q:H\to 2^H$ 称为单调的,若对一切 $x,y\in H,f\in Qx$ 和 $g\in Qy$,有$\langle x-y,f-g\rangle\geqslant 0$,则称单调映象 $Q:H\to 2^H$ 是最大的;若 Q 的图像 $G(Q)$ 不真包含在其他单调映射的图像中,单调映象 Q 是最大的,当且仅当对任意的$(x,f)\in H\times H$,如果对每个$(y,g)\in G(Q)$,都有$\langle x-y,f-g\rangle\geqslant 0$ 成立,就蕴含 $f\in Qx$;令 B 是一个 C 到 H 内的可逆 - 强单调映象,令 N_Cv 是如下的正规锥:$N_Cv=\{w\in H:\langle v-u,w\rangle\geqslant 0,\forall u\in C\}$. 定义 $Qv=\begin{cases}Bv+N_Cv,v\in C\\ \varnothing,v\notin C\end{cases}$,则 Q 是最大单调的,且 $0\in Qv$,当且仅当 $v\in VI(C,B)$.

定义 3　映象 $f: C \to C$ 称为压缩的,若存在 $\alpha(0 < \alpha < 1)$,对一切 $x, y \in C$,都有 $\| f(x) - f(y) \| \leqslant \alpha \| x - y \|$.

定义 4　映象 $f: C \to C$ 被称为具有这类 $C_{\Psi(s)}$ 的弱压缩映象,如果存在一连续且递增函数 $\Psi: [0, \infty) \to [0, \infty)$, $\Psi(s) > 0, \forall s > 0, \Psi(0) = 0, \lim\limits_{s \to \infty} \Psi(s) = +\infty$, 且对 $\forall x, y \in C$, 有 $\| f(x) - f(y) \| \leqslant \| x - y \| - \Psi(\| x - y \|)$.

注 1　显然,具有常数 α 的压缩映象一定是弱压缩映象,其中 $\Psi(s) = (1 - \alpha)s$;反之,一般不成立.

文献[1]中,映象 $Ax = \sin x: [0,1] \to [0,1]$ 是具有 $\Psi(s) = \dfrac{s^2}{8}$ 的弱压缩映象,但是 A 不是压缩映象,事实上,假如 A 是具有 $\alpha \in (0,1)$ 的压缩映象,则 $\forall x, y \in [0,1]$,有 $|\sin x - \sin y| \leqslant \alpha |x - y|$. 由于 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1, \varepsilon = 1 - \alpha, \exists \delta > 0, 0 < x < \delta$, 有 $\left| \dfrac{\sin x}{x} - 1 \right| < 1 - \alpha$, 因此 $\alpha < \left| \dfrac{\sin x - \sin 0}{x - 0} \right|$,即 $\alpha |x - 0| < |\sin x - \sin 0|$,矛盾. 因此 A 不是压缩映象.

定义 5　映象集合 $S = \{T(t): t \in R^+\}: C \to C$ 被称为非扩张半群,如果满足下列条件

i) $T(0)x = x, \forall x \in C$;

ii) $T(s + t)x = T(s)T(t)x, \forall x \in C$ 和 $\forall s, t \in \mathbb{R}^+$;

iii) $\forall x \in C$,映象 $t \to T(t)x$ 对 $t \in \mathbb{R}^+$ 是连续的;

iv) $\| T(t)x - T(t)y \| \leqslant \| x - y \|, \forall t \geqslant 0, \forall x, y \in C$.

定义 6　空间 X 称为满足 Opial 条件,如果对每个 x 中弱收敛于 $x \in X$ 的序列 $\{x_n\}$ 有 $\liminf\limits_{n \to \infty} \| x_n - x \| < \liminf\limits_{n \to \infty} \| x_n - y \|, \forall y \in X, y \neq x$.

为了寻找非扩张映象 S 的不动点集与变分不等式解集的公共元素,文献[2]引入下列迭代过程:

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) S P_C (x_n - \lambda_n A x_n)$$

文献[2]证明了,如果 $F(S) \cap VI(C, A)$ 非空,且当 $\{\alpha_n\}$ 和 $\{\lambda_n\}$ 满足一定的条件时,则该序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 $z \in F(S) \cap VI(C, A)$. 文献[3]研究了迭代过程

$$x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + (1 - \alpha_n) S P_C (x_n - \lambda_n A x_n)$$

并通过该黏滞逼近获得了强收敛定理,其中 f 是具系数 $\alpha(0 < \alpha < 1)$ 的压缩映象. 近年来,文献[4]引入如下一族非扩张映象的黏滞迭代过程:

$$x_{n+1} = \alpha_n \gamma f(x_n) + \beta x_n + ((1 - \beta_n) I - \alpha_n A) W_n x_n$$

其中,f 是具有这类 $C_{\Psi(s)}$ 的弱压缩映象,W_n 是 W 映象. 对于非扩张半群不动点的迭代逼近问题,文献[5]考虑了下列迭代序列:

$$x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + \beta_n x_n + (1 - \alpha_n - \beta_n) \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} T(s) x_n \mathrm{d}s$$

他们证明了这种迭代序列强收敛于非扩张半群 S 的公共不动点,其中 f 是具系数 $\alpha(0 < \alpha < 1)$ 的压缩映象. 文献[6]引入了下列迭代序列:

$$x_{n+1} = \alpha_n \gamma f(x_n) + (I - \alpha_n A) \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s) x_n \mathrm{d}s$$

并证明迭代的收敛性. 文献[7]引入了如下迭代:

$$x_{n+1} = \alpha_n \gamma f(x_n) + \beta_n x_n + ((1-\beta_n)I - \alpha_n A) \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s) x_n \mathrm{d}s$$

其中f是具系数$\alpha(0<\alpha<1)$的压缩映象. 另外,文献[8-25]研究了一些非线性映象不动点的迭代收敛性问题. 受上述工作启发,本文拟考虑具有可逆强单调映象与带有误差项的非扩张半群的隐式和显式这两种黏滞迭代算法:

$$x_n = \alpha_n \gamma f(x_n) + (I - \alpha_n A) P_C (I - \lambda_n B) \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s) x_n \mathrm{d}s + e_n$$

$$x_{n+1} = \alpha_n \gamma f(P_C(I - \lambda_n B_1) \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s) x_n \mathrm{d}s) + \beta_n x_n +$$

$$((1-\beta_n)I - \alpha_n A) P_C (I - \lambda_n B_2) \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s) x_n \mathrm{d}s + d_n$$

其中,f是具有这类$C_{\Psi(s)}$的弱压缩映象;$\{e_n\}$,$\{d_n\}$是C中的序列. 在适当的条件下,建立非扩张半群不动点集与变分不等式解集的公共元素的强收敛性定理,以期该研究结果能够推广和改进一些文献[2-3,5-7]的结果.

为了证明主要结果,需要下列一些引理.

引理1[1] 设(X,d)是完备度量空间,$T:X\to X$是弱压缩映象,则T在X中有唯一不动点.

引理2[26] 设A是Hilbert空间H上具有系数$\bar{\gamma}>0$的强正有界线性算子,且$0<\rho\leqslant\|A\|^{-1}$,则$\|I-\rho A\|\leqslant 1-\rho\bar{\gamma}$.

引理3[27] 设C是Hilbert空间H的非空有界闭凸子集,$\{T(s):0\leqslant s<\infty\}$是$C$到$C$的非扩张半群,则对$\forall h\geqslant 0$,有$\lim\limits_{t\to+\infty}\sup\limits_{x\in C}\left\|\frac{1}{t}\int_0^t T(s)x\mathrm{d}s - T(h)\left(\frac{1}{t}\int_0^t T(s)x\mathrm{d}s\right)\right\| = 0$.

引理4 设H是Hilbert空间,C是H的闭凸子集,$f:C\to C$具有这类$C_{\Psi(s)}$的弱压缩映象,A是强正有界算子且具有系数$\bar{\gamma}>0$,则对$0<\gamma<\bar{\gamma}$,$x,y\in C$,有

$$\langle x-y,(A-\gamma f)x-(A-\gamma f)y\rangle \geqslant (\bar{\gamma}-\gamma)\|x-y\|^2 + \gamma\Psi(\|x-y\|)\|x-y\|$$

证明 因A是具有系数$\bar{\gamma}>0$的强正有界算子,所以$x,y\in C$,有

$$\langle x-y,A(x-y)\rangle \geqslant \bar{\gamma}\|x-y\|^2$$

又$\langle x-y,\gamma fx-\gamma fy\rangle\leqslant\gamma\|x-y\|^2-\gamma\Psi(\|x-y\|)\|x-y\|$,$x,y\in C$,据此有

$$\langle x-y,(A-\gamma f)x-(A-\gamma f)y\rangle = \langle x-y,A(x-y)\rangle - \langle x-y,\gamma fx-\gamma fy\rangle \geqslant$$

$$(\bar{\gamma}-\gamma\|x-y\|^2 + \gamma\Psi(\|x-y\|)\|x-y\|$$

引理5[28] 设$\{a_n\}$,$\{b_n\}$和$\{c_n\}$是3个非负实数列,且满足条件

$$a_{n+1}\leqslant(1-\omega_n)a_n + b_n + c_n,\ \forall n\geqslant n_0$$

其中,n_0是某一非负整数,$\omega_n\in(0,1)$,$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\omega_n=\infty$,$b_n=o(\omega_n)$,$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n<\infty$,则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

引理6 设H是实Hilbert空间中,则$x,y\in H$,有$\|x+y\|^2\leqslant\|x\|^2+2\langle y,x+y\rangle$.

2　主要结果

定理 1　设 C 是 Hilbert 空间 H 的非空闭凸子集，$S=\{T(s):0\leqslant s<\infty\}$ 是 C 到 C 的非扩张半群，B 是 C 到 H 的 α - 可逆 - 强单调映象，使得 $F=F(S)\cap VI(C,B)\neq\varnothing$. 如果 f 是 $C\to C$ 具有 $C_{\Psi(s)}$ 的弱压缩映象，A 是 $C\to C$ 以 $\bar{\gamma}>0$ 为系数的强正有界线性算子，使得 $0<\gamma<\bar{\gamma}$，$\{\alpha_n\}$ 是 $(0,1]$ 中的数列，$\{t_n\}$ 是 $(0,\infty)$ 中的序列，$\{e_n\}$ 是 C 中的序列，$\{\lambda_n\}$ 是 $[a,b]$ 中的序列，满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}t_n=+\infty$，$\|e_n\|=o(\alpha_n)$，$0<a<b<2\alpha$，$\{x_n\}$ 是由下式生成的序列：

$$x_n=\alpha_n\gamma f(x_n)+(I-\alpha_nA)P_C(I-\lambda_nB)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)x_n\mathrm{d}s \tag{③}$$

则 $\{x_n\}$ 强收敛于 $z\in F$，且 z 是变分不等式 $\langle\gamma f(z)-Az,p-z\rangle\leqslant 0,\ \forall p\in F$ 的解.

证明　因为 $\|e_n\|=o(\alpha_n)$，所以存在 $\xi_n\geqslant 0$，$\xi_n\to 0(n\to\infty)$，使得 $\|e_n\|=\alpha_n\xi_n$，而且存在 $G>0$，使得 $\xi_n\leqslant G$. 下面首先证明 $\{x_n\}$ 是良定的，令

$$g_{\alpha_n}(x)=\alpha_n\gamma f(x_n)+(I-\alpha_nA)P_C\left((I-\lambda_nB)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)x\mathrm{d}s\right)+e_n$$

则 $g:C\to C$，因为 $\alpha_n\to 0(n\to\infty)$，可设对 $n\geqslant 1$，有 $\alpha_n<\|A\|^{-1}$. 由引理 2 可知

$$\begin{gathered}\|g_{\alpha_n}(x)-g_{\alpha_n}(y)\|\leqslant\alpha_n\gamma\|x-y\|-\alpha_n\gamma\Psi(\|x-y\|)+\\ \left\|(I-\alpha_nA)P_C(I-\lambda_nB)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)x\mathrm{d}s-P_C(I-\lambda_nB)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)y\mathrm{d}s\right\|\leqslant\\ \alpha_n\gamma\|x-y\|-\alpha_n\gamma\Psi(\|x-y\|)+\|I-\alpha_nA\|\left\|\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)x\mathrm{d}s-\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)y\mathrm{d}s\right\|\leqslant\\ (1-\alpha_n(\bar{\gamma}-\gamma))\|x-y\|-\alpha_n\gamma\Psi(\|x-y\|)\leqslant\|x-y\|-\alpha_n\gamma\Psi(\|x-y\|)\end{gathered}$$

因此 g_{α_n} 是 C 到 C 的具有这类 $C_{\alpha_n\gamma\Psi(s)}$ 的弱压缩映象. 由引理 1 可知，对每一 $n\in N$，存在唯一的 $x_n\in C$，使得

$$x_n=\alpha_n\gamma f(x_n)+(I-\alpha_nA)P_C(I-\lambda_nB)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)x_n\mathrm{d}s+e_n$$

因此 $\{x_n\}$ 是良定的. 然后证明 $\{x_n\}$ 是有界的. 取 $u\in F$，则 $u=P_C(u-\lambda Bu)$. 由引理 4 可知

$$\begin{gathered}\|x_n-u\|\leqslant\alpha_n\|\gamma f(x_n)-Au\|+\\ (I-\alpha_nA)\left\|(I-\lambda_nB)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)x_n\mathrm{d}s-(I-\lambda_nB)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)u\mathrm{d}s\right\|+\|e_n\|\leqslant\\ \alpha_n\|\gamma f(x_n)-Au\|+(I-\alpha_nA)\left\|\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)x_n\mathrm{d}s-\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)u\mathrm{d}s\right\|+\|e_n\|\leqslant\\ \alpha_n\|\gamma f(x_n)-\gamma f(u)\|+\alpha_n\|\gamma f(u)-Au\|+\|(I-\alpha_nA)\|\|x_n-u\|+\|e_n\|\leqslant\\ \alpha_n\gamma\|x_n-u\|-\gamma\alpha_n\Psi(\|x_n-u\|)+(I-\alpha_n\bar{\gamma})\|x_n-u\|+\alpha_n\|\gamma f(u)-Au\|+\|e_n\|=\\ (I-\alpha_n(\bar{\gamma}-\gamma))\|x_n-u\|-\gamma\alpha_n\Psi(\|x_n-u\|)+\alpha_n\|\gamma f(u)-Au\|+\|e_n\|\end{gathered}$$

据此有 $\|x_n-u\|\leqslant\dfrac{\|\gamma f(u)-Au\|+G}{\bar{\gamma}-\gamma}$，即 $\{x_n\}$ 是有界的，从而 $\{P_C(I-\lambda_nB)x_n\}$，$\{Ax_n\}$，$\{f(x_n)\}$，$\left\{P_C(I-\lambda_nB)\dfrac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)x_n\mathrm{d}s\right\}$ 也是有界的. 另一方面，由 ②③ 式可得

$$\|x_n-u\|^2\leqslant\left(\alpha_n\|\gamma f(x_n)-Au\|+(1-\alpha_n\bar{\gamma})\left\|P_C(I-\lambda_nB)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)x_n\mathrm{d}s-u\right\|+\|e_n\|\right)^2\leqslant$$

$$\alpha_n\|\gamma f(x_n)-Au\|^2+(1-\alpha_n\bar{\gamma})\left\|P_C(I-\lambda_nB)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)x_n\mathrm{d}s-u\right\|^2+\|e_n\|^2+$$

$$2\alpha_n\|\gamma f(x_n)-Au\|\left\|P_C(I-\lambda_nB)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)x_n\mathrm{d}s-u\right\|\leqslant$$

$$\alpha_n\|\gamma f(x_n)-Au\|^2+(1-\alpha_n\bar{\gamma})\|x_n-u\|^2+(1-\alpha_n\bar{\gamma})\lambda_n(\lambda_n-2\alpha)\|Bx_n-Bu\|^2+$$

$$2\alpha_n\|\gamma f(x_n)-Au\|\|x_n-u\|+2\alpha_n\|e_n\|\|\gamma f(x_n)-Au\|+2\|e_n\|\|x_n-u\|$$

因此有

$$-(1-\alpha_n\bar{\gamma})a(b-2\alpha)\|Bx_n-Bu\|^2\leqslant\alpha_n\|\gamma f(x_n)-Au\|^2+2\alpha_n\|\gamma f(x_n)-Au\|\|x_n-u\|-$$

$$\alpha_n\bar{\gamma}\|x_n-u\|^2+2\alpha_n\|e_n\|\|\gamma f(x_n)-Au\|+2\|e_n\|\|x_n-u\|$$

由 $\alpha_n\to0(n\to\infty)$ 和 $\{x_n\}$, $\{f(x_n)\}$ 有界,可得 $\|Bx_n-Bu\|\to0(n\to\infty)$. 令 $y_n=P_C(I-\lambda_nB)x_n$, 再由 ① 式,有

$$\|y_n-u\|^2\leqslant\langle(I-\lambda_nB)x_n-(I-\lambda_nB)u,y_n-u\rangle=$$

$$\frac{1}{2}\{\|(I-\lambda_nB)x_n-(I-\lambda_nB)u\|^2+\|y_n-u\|^2-\|x_n-y_n-\lambda_n(Bx_n-Bu)\|^2\}\leqslant$$

$$\frac{1}{2}\{\|y_n-u\|^2+\|x_n-u\|^2-\|y_n-x_n\|^2+2\lambda_n\langle x_n-y_n,Bx_n-Bu\rangle-\lambda_n^2\|Bx_n-Bu\|^2\}$$

因此, $\|y_n-u\|^2\leqslant\|x_n-u\|^2-\|x_n-y_n\|^2+2\lambda_n\|x_n-y_n\|\|Bx_n-Bu\|$,进而有

$$\|x_n-u\|^2\leqslant\alpha_n\|\gamma f(x_n)-Au\|^2+(1-\alpha_n\bar{\gamma})\|y_n-u\|^2+2\alpha_n\|\gamma f(x_n)-Au\|\|y_n-u\|+$$

$$2\alpha_n\|e_n\|\|\gamma f(x_n)-Au\|+2\|e_n\|\|x_n-u\|\leqslant$$

$$\alpha_n\|\gamma f(x_n)-Au\|^2+(1-\alpha_n\bar{\gamma})\|x_n-u\|^2-(1-\alpha_n\bar{\gamma})\|x_n-y_n\|^2+$$

$$2(1-\alpha_n\bar{\gamma})\lambda_n\|x_n-y_n\|\|Bx_n-Bu\|+2\alpha_n\|\gamma f(x_n)-Au\|\|y_n-u\|+$$

$$2\alpha_n\|e_n\|\|\gamma f(x_n)-Au\|+2\|e_n\|\|x_n-u\|$$

于是

$$(1-\alpha_n\bar{\gamma})\|x_n-y_n\|^2\leqslant\alpha_n\|\gamma f(x_n)-Au\|^2-\alpha_n\bar{\gamma}\|x_n-u\|^2+$$

$$2(1-\alpha_n\bar{\gamma})\lambda_n\|x_n-y_n\|\|Bx_n-Bu\|+2\alpha_n\|\gamma f(x_n)-Au\|\|y_n-u\|+$$

$$2\alpha_n\|e_n\|\|\gamma f(x_n)-Au\|+2\|e_n\|\|x_n-u\|$$

由于 $\alpha_n\to0$, $\|Bx_n-Bu\|\to0(n\to\infty)$,所以 $\|x_n-y_n\|\to0(n\to\infty)$. 由 ③ 式,有

$$\left\|x_n-\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)y_n\mathrm{d}s\right\|\leqslant\alpha_n\left\|\gamma f(x_n)-A\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)y_n\mathrm{d}s\right\|+\|e_n\|\to0(n\to\infty)$$

故

$$\left\|y_n-\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)y_n\mathrm{d}s\right\|\leqslant\|x_n-y_n\|+\left\|x_n-\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)y_n\mathrm{d}s\right\|\to0(n\to\infty)$$

因 $\{y_n\}$ 有界,所以存在 $\{y_n\}$ 的子列 $\{y_{n_i}\}$ 弱收敛于 z. 因 $\left\|y_n-\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)y_n\mathrm{d}s\right\|\to0(n\to\infty)$,可知 $\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)y_n\mathrm{d}s$ 弱收敛于 z.

要证 $z \in F(S) \cap VI(C,B)$，首先证明 $z \in VI(C,B)$，令 $Qv = \begin{cases} Bv + N_C v, v \in C \\ \varnothing, v \notin C \end{cases}$，则 T 是最大单调的. 令 $(v,w) \in G(Q)$，因为 $w - Bv \in N_C v, y_n \in C$，所以有 $\langle v - y_n, w - Bv \rangle \geqslant 0$. 另一方面，因 $y_n = P_C(I - \lambda_n B)x_n$，所以 $\langle v - y_n, y_n - (x_n - \lambda_n Bx_n) \rangle \geqslant 0$，进而 $\langle v - y_n, Bx_n + \frac{y_n - x_n}{\lambda_n} \rangle \geqslant 0$. 由于 $\langle v - y_{n_i}, Bv - By_{n_i} \rangle \geqslant 0$，可知

$$\langle v - y_{n_i}, w \rangle \geqslant \langle v - y_{n_i}, Bv \rangle \geqslant \langle v - y_{n_i}, Bv \rangle - \langle v - y_{n_i}, Bv_{n_i} + \frac{y_{n_i} - x_{n_i}}{\lambda_{n_i}} \rangle =$$

$$\langle v - y_{n_i}, Bv - By_{n_i} \rangle + \langle v - y_{n_i}, By_{n_i} - Bx_{n_i} \rangle - \langle v - y_{n_i}, \frac{y_{n_i} - x_{n_i}}{\lambda_{n_i}} \rangle \geqslant$$

$$\langle v - y_{n_i}, By_{n_i} - Bx_{n_i} \rangle - \langle v - y_{n_i}, \frac{y_{n_i} - x_{n_i}}{\lambda_{n_i}} \rangle$$

在上式中令 $i \to \infty$，有 $\langle v - z, w \rangle \geqslant 0$. 由于 Q 是最大单调的，因此 $z \in Q^{-1}\{0\}$，从而 $z \in VI(C,B)$.

其次证明 $z \in F(S)$. 因为 Hilbert 空间满足 Opial 条件，若 $T(s)z \neq z$，由 $\left\| y_n - \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s) y_n \mathrm{d}s \right\| \to 0 (n \to \infty)$ 和引理 3 可知 $\liminf_{i\to\infty} \| y_{n_i} - z \| < \liminf_{i\to\infty} \| y_{n_i} - T(s)z \| \leqslant$

$$\liminf_{i\to\infty} \Big[\left\| y_{n_i} - \frac{1}{t_{n_i}}\int_0^{t_{n_i}} T(s) y_{n_i} \mathrm{d}s \right\| + \left\| \frac{1}{t_{n_i}}\int_0^{t_{n_i}} T(s) y_{n_i} \mathrm{d}s - T(s)\left(\frac{1}{t_{n_i}}\int_0^{t_{n_i}} T(s) y_{n_i} \mathrm{d}s\right) \right\| +$$

$$\left\| T(s)\left(\frac{1}{t_{n_i}}\int_0^{t_{n_i}} T(s) y_{n_i} \mathrm{d}s\right) - T(s)z \right\| \Big] \leqslant \liminf_{i\to\infty} \| y_{n_i} - z \|$$

矛盾. 故 $z \in F(S)$，于是 $z \in F$. 由 $\{x_n\}$ 有界和 $\| x_n - y_n \| \to 0 (n \to \infty)$，必有子列 $\{x_{n_i}\}$ 弱收敛于 z. 由 ③ 式，有

$$\| x_n - z \|^2 \leqslant \alpha_n \langle \gamma f(x_n) - Az, x_n - z \rangle +$$

$$\langle (I - \alpha_n A)\left(P_C(I - \lambda_n B) \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s) x_n \mathrm{d}s - z\right), x_n - z \rangle + \langle e_n, x_n - z \rangle \leqslant$$

$$\alpha_n \langle \gamma f(x_n) - Az, x_n - z \rangle + (1 - \alpha_n \bar{\gamma}) \| x_n - z \|^2 + \| e_n \| \| x_n - z \|$$

于是

$$\| x_n - z \|^2 \leqslant \frac{1}{\bar{\gamma} + \frac{1}{2}\xi_n} \langle \gamma f(x_n) - Az, x_n - z \rangle + \frac{1}{2}\xi_n =$$

$$\frac{1}{\bar{\gamma} + \frac{1}{2}\xi_n} \left\{ \langle \gamma f(x_n) - \gamma f(z), x_n - z \rangle + \langle \gamma f(z) - Az, x_n - z \rangle + \frac{1}{2}\xi_n \right\} \leqslant$$

$$\frac{1}{\bar{\gamma} + \frac{1}{2}\xi_n} \left\{ \gamma \| x_n - z \|^2 - \gamma \Psi(\| x_n - z \|) \| x_n - z \| + \langle \gamma f(z) - Az, x_n - z \rangle + \frac{1}{2}\xi_n \right\}$$

所以 $\| x_n - z \|^2 \leqslant \dfrac{\langle \gamma f(z) - Az, x_n - z \rangle + \frac{1}{2}\xi_n}{\bar{\gamma} + \frac{1}{2}\xi_n - \gamma}$. 特别地，有

$$\| x_{n_i} - z \|^2 \leqslant \frac{\langle \gamma f(z) - Az, x_{n_i} - z \rangle + \frac{1}{2}\xi_{n_i}}{\bar{\gamma} + \frac{1}{2}\xi_{n_i} - \gamma}$$

因$\{x_{n_i}\}$弱收敛于z,所以$x_{n_i} \to z$.

下面证明z是变分不等式$\langle (A - \gamma f)z, z - p \rangle \leqslant 0, p \in F$的解. 因为

$$(A - \gamma f)x_n = -\frac{1}{\alpha_n}(I - \alpha_n A)\left(x_n - P_C(I - \lambda_n B)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)x_n \mathrm{d}s - e_n\right)$$

$$p = P_C(I - \lambda_n B)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)p\mathrm{d}s$$

所以有

$$\begin{aligned}
&\langle (A - \gamma f)x_n, x_n - p \rangle \leqslant \\
&-\frac{1}{\alpha_n}\langle (I - \alpha_n A)(x_n - P_C(I - \lambda_n B)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)x_n \mathrm{d}s), x_n - p \rangle + \frac{1}{\alpha_n}\langle e_n, x_n - z \rangle = \\
&-\frac{1}{\alpha_n}\langle (x_n - P_C(I - \lambda_n B)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)x_n \mathrm{d}s) - (p - P_C(I - \lambda_n B)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)p\mathrm{d}s), x_n - p \rangle + \\
&\langle A(I - P_C(I - \lambda_n B)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)\mathrm{d}s)x_n, x_n - p \rangle + \frac{1}{\alpha_n}\langle e_n, x_n - p \rangle
\end{aligned}$$

又因为$P_C(I - \lambda_n B)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)\mathrm{d}s$是非扩张的,所以$I - P_C(I - \lambda_n B)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)\mathrm{d}s$是强单调的,因此

$$\langle (x_n - P_C(I - \lambda_n B)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)x_n \mathrm{d}s) - (p - P_C(I - \lambda_n B)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)p\mathrm{d}s), x_n - p \rangle \geqslant 0$$

进而有

$$\langle (A - \gamma f)x_n, x_n - p \rangle \leqslant \langle A(I - P_C(I - \lambda_n B)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)\mathrm{d}s)x_n, x_n - p \rangle + \xi_n \| x_n - p \| \quad ④$$

注意到$z = P_C(I - \lambda_n B)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)z\mathrm{d}s$, $\{x_n\}$有界及$\xi_n \to 0 (n \to \infty)$. 在④式中用$n_i$代替$n$并令$i \to \infty$,可得

$$\langle (A - \gamma f)z, z - p \rangle = \lim_{t \to \infty}\langle (A - \gamma f)x_{n_i}, x_{n_i} - p \rangle \leqslant 0 \quad ⑤$$

即$z \in F$是该变分不等式的解.

最后证明唯一性. 假若存在$\{x_n\}$的另一个子列$\{x_{n_j}\}$弱收敛于z^*,则$z^* \in F$. 类似地,可以证明

$$\langle (A - \gamma f)z^*, z^* - p \rangle \leqslant 0, p \in F \quad ⑥$$

将⑤式和⑥式相加,并使用引理4可得

$$(\bar{\gamma} - \gamma)\| z - z^* \|^2 + \gamma \Psi(\| z - z^* \|)\| z - z^* \| \leqslant \langle z - z^*, (A - \gamma f)(z - z^*) \rangle \leqslant 0$$

由于$\forall s > 0, \Psi(s) > 0, \Psi(0) = 0$,因此$\| z - z^* \| = 0$,即$z = z^*$,故$x_n \to z (n \to \infty)$. 证毕.

定理2 设C是Hilbert空间H的非空闭凸子集,$S = \{T(s) : 0 \leqslant s < \infty\}$是$C$到$C$的非扩张半群,$B_i (i = 1,2)$是$C$到$H$的$\alpha_i$-可逆-强单调映象,使得$F = F(S) \cap VI(C, B_1) \cap VI(C, B_2) \neq \emptyset$. 如果$f$是$C \to C$具有这类$C_{\Psi(s)}$的弱压缩映象,$A$是$C \to C$以$\bar{\gamma} > 0$为系数的强正有界线

性算子,使得 $0<\gamma<\bar{\gamma}$,$\{\alpha_n\}$ 与 $\{\beta_n\}$ 分别是 $(0,1]$ 和 $[0,\beta]$ 中的实数列,$\{t_n\}$ 是 $(0,\infty)$ 中的序列,$\{\lambda_n\}$ 是 $[a,b]$ 中的实数列,$\{d_n\}$ 是 C 中序列,满足下列条件:

i) $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0,\lim\limits_{n\to\infty}t_n=+\infty$;

ii) $0<a<b<2\alpha,\beta<1$;

iii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\infty$;

iv) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\alpha_{n+1}-\alpha_n|<\infty$;

v) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\beta_{n+1}-\beta_n|<\infty$;

vi) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\lambda_{n+1}-\lambda_n|<\infty$;

vii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|t_{n+1}-t_n|}{t_{n+1}}<\infty$;

viii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|d_n\|<\infty$.

对 $x_0\in C$,则 $\{x_n\}$ 是由下式生成的序列

$$x_{n+1}=\alpha_n\gamma f\left(P_C(I-\lambda_nB_1)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)x_n\mathrm{d}s\right)+\beta_nx_n+$$
$$((1-\beta_n)I-\alpha_nA)P_C(I-\lambda_nB_2)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)x_n\mathrm{d}s+d_n \quad ⑦$$

且 $\{x_n\}$ 强收敛于 $q\in F$,其中 $q=P_F(\langle I-A\rangle+\gamma f)(q)$ 是下面变分不等式的解

$$\langle\gamma f(q)-Aq,p-q\rangle\leqslant 0,\forall p\in F \quad ⑧$$

证明　因 A 是 C 上的强正有界线性算子,所以可设 $\|A\|=\sup\{|\langle Ax,x\rangle|:x\in C,\|x\|=1\}$. 又因为 $\alpha_n\to 0(n\to\infty)$,$0<\beta_n\leqslant\beta$,不失一般性,可设对 $\forall n\geqslant 1$,有 $\alpha_n\leqslant(1-\beta_n)\|A\|^{-1}$. 由于 $\langle((1-\beta_n)I-\alpha_nA)x,x\rangle=1-\beta_n-\alpha_n\langle Ax,x\rangle\geqslant 1-\beta_n-\alpha_n\|A\|\geqslant 0$,可得

$$\|(1-\beta_n)I-\alpha_nA\|=\sup\{\langle((1-\beta_n)I-\alpha_nA)x,x\rangle:x\in C,\|x\|=1\}=$$
$$\sup\{1-\beta_n-\alpha_n\langle Ax,x\rangle:x\in C,\|x\|=1\}\leqslant 1-\beta_n-\alpha_n\bar{\gamma}$$

下面首先证明 $\{x_n\}$ 有界. 取 $u\in F$,则

$$\|x_{n+1}-u\|=\left\|\alpha_n\gamma f\left(P_C(I-\lambda_nB_1)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)x_n\mathrm{d}s\right)+\beta_nx_n+\right.$$
$$\left.((1-\beta_n)I-\alpha_nA)P_C(I-\lambda_nB_2)\frac{1}{2}\int_0^{t_n}T(s)x_n\mathrm{d}s+d_n-u\right\|=$$
$$\left\|\alpha_n\left(\gamma f(P_C(I-\lambda_nB_1)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)x_n\mathrm{d}s)-Au\right)+\beta_n(x_n-u)+\right.$$
$$\left.((1-\beta_n)I-\alpha_nA)\left(P_C(I-\lambda_nB_2)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)x_n\mathrm{d}s-u\right)+d_n\right\|\leqslant$$
$$\alpha_n\left\|\gamma f(P_c(I-\lambda_nB_1)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)x_n\mathrm{d}s)-Au\right\|+$$

$$\beta_n \| x_n - u \| + \| (1-\beta_n)I - \alpha_n A \| \| x_n - u \| + \| d_n \| \leqslant$$

$$\alpha_n \| \gamma f(P_C(I-\lambda_n B_1) \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)x_n \mathrm{d}s) - \gamma f(u) \| + \alpha_n \| \gamma f(u) - Au \| +$$

$$\beta_n \| x_n - u \| + \| (1-\beta_n)I - \alpha_n A \| \| x_n - u \| + \| d_n \| \leqslant$$

$$\gamma\alpha_n \| x_n - u \| - \gamma\alpha_n \Psi(\| P_C(I-\lambda_n B_1) \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)x_n \mathrm{d}s - u \|) + \beta_n \| x_n - u \| +$$

$$(1-\alpha_n\bar{\gamma}-\beta_n) \| x_n - u \| + \alpha_n \| \gamma f(u) - Au \| + \| d_n \| =$$

$$(1-\alpha_n(\bar{\gamma}-\gamma)) \| x_n - u \| - \gamma\alpha_n \Psi(\| P_C(I-\lambda_n B_1) \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)x_n \mathrm{d}s - u \|) +$$

$$\alpha_n \| \gamma f(u) - Au \| + \| d_n \|$$

于是对 $\forall n \geqslant 0$,有

$$\| x_n - u \| \leqslant \max\left\{ \| x_0 - u \|, \frac{\| \gamma f(u) - Au \|}{\bar{\gamma}-\gamma} \right\} + \sum_{i=1}^{n} \| d_i \| < \infty$$

即$\{x_n\}$有界,进而$\left\{\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)x_n \mathrm{d}s\right\}$, $\left\{B_2 \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)x_n \mathrm{d}s\right\}$, $\{Ax_n\}$, $\left\{f\left(P_C(I-\lambda_n B_1) \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)x_n \mathrm{d}s\right)\right\}$都是有界的.

其次证明 $\| x_{n+1} - x_n \| \to 0 (n \to \infty)$. 因为

$$\left\| P_C(I-\lambda_{n+1}B_2) \frac{1}{t_{n+1}}\int_0^{t_{n+1}} T(s)x_{n+1} \mathrm{d}s - P_C(I-\lambda_n B_2) \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)x_n \mathrm{d}s \right\| \leqslant$$

$$\left\| (I-\lambda_{n+1}B_2) \frac{1}{t_{n+1}}\int_0^{t_{n+1}} T(s)x_{n+1} \mathrm{d}s - (I-\lambda_n B_2) \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)x_n \mathrm{d}s \right\| \leqslant$$

$$\left\| \frac{1}{t_{n+1}}\int_0^{t_{n+1}} T(s)x_{n+1} \mathrm{d}s - \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)x_n \mathrm{d}s \right\| + \left\| \lambda_n B_2 \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)x_n \mathrm{d}s - \lambda_{n+1}B_2 \frac{1}{t_{n+1}}\int_0^{t_{n+1}} T(s)x_n \mathrm{d}s \right\| \leqslant$$

$$\frac{1}{t_{n+1}}\int_0^{t_{n+1}} \| T(s)x_{n+1} - T(s)x_n \| \mathrm{d}s + \left(\frac{1}{t_{n+1}} - \frac{1}{t_n}\right)\int_0^{t_n} \| T(s)x_n - T(s)u \| \mathrm{d}s +$$

$$\frac{1}{t_{n+1}}\int_{t_n}^{t_{n+1}} \| T(s)x_n - T(s)u \| \mathrm{d}s + \left\| \lambda_n B_2 \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)x_n \mathrm{d}s - \lambda_{n+1}B_2 \frac{1}{t_{n+1}}\int_0^{t_{n+1}} T(s)x_n \mathrm{d}s \right\| \leqslant$$

$$\| x_{n+1} - x_n \| + \frac{2| t_{n+1} - t_n |}{t_{n+1}} \| x_n - u \| + | \lambda_n - \lambda_{n+1} | M_1$$

其中 $M_1 = \sup\left\{ \left\| B_2 \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)x_n \mathrm{d}s \right\|, n \geqslant 0 \right\}$. 所以

$$\| x_{n+2} - x_{n+1} \| = \left\| \alpha_{n+1}\gamma f\left(P_C(I-\lambda_{n+1}B_1) \frac{1}{t_{n+1}}\int_0^{t_{n+1}} T(s)x_{n+1} \mathrm{d}s\right) + \beta_{n+1}x_{n+1} + \right.$$

$$((1-\beta_{n+1})I - \alpha_{n+1}A)P_C(I-\lambda_{n+1}B_2) \frac{1}{t_{n+1}}\int_0^{t_{n+1}} T(s)x_{n+1} \mathrm{d}s + d_{n+1} -$$

$$\left. \alpha_n\gamma f\left(P_C(I-\lambda_n B_1) \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)x_n \mathrm{d}s\right) - \beta_n x_n - ((1-\beta_n)I - \alpha_n A)P_C(I-\lambda_n B_2) \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)x_n \mathrm{d}s - d_n \right\| =$$

$$\left\| ((1-\beta_{n+1})I - \alpha_{n+1}A)\left(P_C(I-\lambda_{n+1}B_2) \frac{1}{t_{n+1}}\int_0^{t_{n+1}} T(s)x_{n+1} \mathrm{d}s - P_C(I-\lambda_n B_2) \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)x_n \mathrm{d}s\right) + \right.$$

$$(\alpha_{n+1} - \alpha_n)AP_C(I-\lambda_n B_2) \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)x_n \mathrm{d}s - (\beta_{n+1} - \beta_n)AP_C(I-\lambda_n B_2) \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)x_n \mathrm{d}s +$$

$$\gamma[\alpha_{n+1}(f(P_C(I-\lambda_{n+1}B_1)\frac{1}{t_{n+1}}\int_0^{t_{n+1}}T(s)x_{n+1}\mathrm{d}s)-f(P_C(I-\lambda_nB_1)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)x_n\mathrm{d}s))+$$

$$f(P_c(I-\lambda_nB_1)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)x_n\mathrm{d}s)(\alpha_{n+1}-\alpha_n)+\beta_{n+1}(x_{n+1}-x_n)+(\beta_{n+1}-\beta_n)x_n]\Big\|+\|d_{n+1}-d_n\|\leqslant$$

$$(1-\beta_{n+1}-\alpha_{n+1}\bar{\gamma}\|P_c(I-\lambda_{n+1}B_2)\frac{1}{t_{n+1}}\int_0^{t_{n+1}}T(s)x_{n+1}\mathrm{d}s-P_C(I-\lambda_nB_2)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)x_n\mathrm{d}s\|+$$

$$\beta_{n+1}\|x_{n+1}-x_n\|+\gamma\alpha_{n+1}\|P_C(I-\lambda_{n+1}B_1)\frac{1}{t_{n+1}}\int_0^{t_{n+1}}T(s)x_{n+1}\mathrm{d}s-P_C(I-\lambda_nB_1)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)x_n\mathrm{d}s\|)-$$

$$\gamma\alpha_{n+1}\Psi(\|P_C(I-\lambda_{n+1}B_1)\frac{1}{t_{n+1}}\int_0^{t_{n+1}}T(s)x_{n+1}\mathrm{d}s-P_C(I-\lambda_nB_1)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)x_n\mathrm{d}s\|)+$$

$$2(|\beta_n-\beta_{n+1}|+|\alpha_n-\alpha_{n+1}|)M+\|d_{n+1}-d_n\|\leqslant$$

$$(1-\alpha_{n+1}(\bar{\gamma}-\gamma))\|x_{n+1}-x_n\|+\frac{4M|t_{n+1}-t_n|}{t_{n+1}}+$$

$$2M(|\beta_n-\beta_{n+1}|+|\alpha_n-\alpha_{n+1}|)+2M_1|\lambda_{n+1}-\lambda_n|+\|d_{n+1}-d_n\|$$

其中

$$M=\max\Big\{\sup_{n\geqslant0}\Big\|(A+I)P_C(I-\lambda_nB_2)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)x_n\mathrm{d}s\Big\|,M_1,$$

$$\sup_{n\geqslant0}\|x_n\|+\|u\|,\sup_{n\geqslant0}\gamma\Big\|f(P_C(I-\lambda_nB_1)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)x_n\mathrm{d}s)\Big\|\Big\}$$

于是由引理 5 可得 $\|x_{n+1}-x_n\|\to0(n\to\infty)$，令 $y_n=P_C(I-\lambda_nB_2)x_n$，则 $\|y_{n+1}-y_n\|\to0(n\to\infty)$. 由于

$$\|x_n-\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)y_n\mathrm{d}s\|\leqslant\|x_n-x_{n+1}\|+\|\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)y_n\mathrm{d}s-x_{n+1}\|\leqslant\|x_n-x_{n+1}\|+$$

$$\alpha_n\|\gamma f(P_C(I-\lambda_nB_1)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)x_n\mathrm{d}s)-A\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)y_n\mathrm{d}s\|+\beta_n\|x_n-\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)y_n\mathrm{d}s\|$$

所以

$$\|x_n-\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)y_n\mathrm{d}s\|\leqslant\frac{1}{1-\beta_n}\|x_n-x_{n+1}\|+$$

$$\frac{\alpha_n}{1-\beta_n}\|\gamma f(P_C(I-\lambda_nB_1)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)x_n\mathrm{d}s\|-A\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)y_n\mathrm{d}s\|$$

因为 $\alpha_n\to0$，$\|d_n\|\to0$，$\|x_{n+1}-x_n\|\to0(n\to\infty)$，故 $\|x_n-\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)y_n\mathrm{d}s\|\to0(n\to\infty)$.

另一方面，由 ② 式可得

$$\|y_n-u\|^2=\|P_C(I-\lambda_nB_2)x_n-P_C(I-\lambda_nB_2)u\|^2\leqslant\|(1-\lambda_nB_2)x_n-(I-\lambda_nB_2)u\|^2\leqslant$$

$$\|x_n-u\|^2+\lambda_n(\lambda_n-2\alpha)\|B_2x_n-B_2u\|^2 \qquad ⑨$$

由 ⑦ 式和引理 6，有

$$\|x_{n+1}-u\|^2\leqslant\|\alpha_n\gamma f(P_C(I-\lambda_nB_1)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)x_n\mathrm{d}s)+$$

$$\beta_nx_n+((1-\beta_n)I-\alpha_nA)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)y_n\mathrm{d}s+d_n-u\|^2=$$

$$\| \alpha_n(\gamma f(P_C(I-\lambda_n B_1)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)x_n\mathrm{d}s)-Au)+$$

$$\beta_n(x_n-\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)y_n\mathrm{d}s)+(I-\alpha_n A)(\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)y_n\mathrm{d}s-u)+d_n\|^2\leqslant$$

$$\|(I-\alpha_n A)(\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)y_n\mathrm{d}s-u)+\beta_n(x_n-\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)y_n\mathrm{d}s)\|^2+$$

$$2\alpha\|\gamma f(P_C(I-\lambda_n B_1)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)x_n\mathrm{d}s)-Au\|\,\|x_{n+1}-u\|+\|d_n\|\leqslant$$

$$(1-\alpha_n\bar{\gamma})\|y_n-u\|^2+2\beta_n(1-\alpha_n\bar{\gamma})\|y_n-u\|\,\|x_n-\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)y_n\mathrm{d}s\|+$$

$$\beta_n^2\|x_n-\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)y_n\mathrm{d}s\|^2+\|d_n\|+$$

$$2\alpha_n\|\gamma f(P_C(I-\lambda_n B_1)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)x_n\mathrm{d}s)-Au\|\,\|x_{n+1}-u\|\leqslant$$

$$\|y_n-u\|^2+2\beta_n(1-\alpha_n\bar{\gamma})\|y_n-u\|\,\|x_n-\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)y_n\mathrm{d}s\|+$$

$$\beta_n^2\|x_n-\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)y_n\mathrm{d}s\|^2+\|d_n\|+$$

$$2\alpha_n\|\gamma f(P_C(I-\lambda_n B_1)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)x_n\mathrm{d}s)-Au\|\,\|x_{n+1}-u\| \tag{10}$$

因此由 ⑨ 式和 ⑩ 式,有

$$\|x_{n+1}-u\|^2\leqslant\|x_n-u\|^2+\lambda_n(\lambda_n-2\alpha)\|B_2x_n-B_2u\|^2+$$

$$2\beta_n(1-\alpha_n\bar{\gamma})\|y_n-u\|\,\|x_n-\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)y_n\mathrm{d}s\|+$$

$$\beta_n^2\|x_n-\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)y_n\mathrm{d}s\|^2+2\alpha_n\|\gamma f(P_C(I-\lambda_n B_1)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)x_n\mathrm{d}s)-Au\|\,\|x_{n+1}-u\|+\|d_n\|$$

于是

$$-a(b-2\alpha)\|B_2x_n-B_2u\|^2\leqslant(\|x_{n+1}-u\|+\|x_n-u\|)(\|x_{n+1}-x_n\|)+$$

$$2\beta_n(1-\alpha_n\bar{\gamma})\|y_n-u\|\,\|x_n-\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)y_n\mathrm{d}s\|+\beta_n^2\|x_n-\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)y_n\mathrm{d}s\|^2+$$

$$2\alpha_n\|\gamma f(P_C(I-\lambda_n B_1)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)x_n\mathrm{d}s)-Au\|\,\|x_{n+1}-u\|+\|d_n\|$$

因为 $\alpha_n\to 0$, $\|d_n\|\to 0$, $\|x_{n+1}-x_n\|\to 0$, $\|x_n-\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s),y_n\mathrm{d}s\|\to 0(n\to\infty)$, $\{y_n\}$, $\{f(P_C(I-\lambda_n B_1)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)x_n\mathrm{d}s)\}$ 有界,所以有 $\|B_2x_n-B_2u\|\to 0(n\to\infty)$. 由 ① 式有

$$\|y_n-u\|^2\leqslant\langle(I-\lambda_n B_2)x_n-(I-\lambda_n B_2)u,y_n-u\rangle=$$

$$\frac{1}{2}\{\|(I-\lambda_n B_2)x_n-(I-\lambda_n B_2)u\|^2+\|y_n-u\|^2-\|(I-\lambda_n B_2)x_n-$$

$$(I-\lambda_n B_2)u-(y_n-u)\|^2\}\leqslant\frac{1}{2}\{\|y_n-u\|^2+\|x_n-u\|^2-$$

$$\|y_n - x_n\|^2 + 2\lambda_n\langle x_n - y_n, B_2x_n - B_2u\rangle - \lambda_n^2\|B_2x_n - B_2u\|^2\}$$

进而

$$\|y_n - u\|^2 \leqslant \|x_n - u\|^2 - \|x_n - y_n\|^2 + 2\lambda_n\|x_n - y_n\|\ \|B_2x_n - B_2u\| \tag{11}$$

由 ⑩ 和 ⑪ 式,有

$$\|x_{n+1} - u\|^2 \leqslant \|x_n - u\|^2 - \|x_n - y_n\|^2 + 2\lambda_n\|x_n - y_n\|\ \|B_2x_n - B_2u\| +$$
$$2\beta_n(1 - \alpha_n\bar{\gamma})\|y_n - u\|\ \|x_n - \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)y_n\mathrm{d}s\| + \beta_n^2\|x_n - \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)y_n\mathrm{d}s\|^2 +$$
$$2\alpha_n\|\gamma f(P_C(I - \lambda_nB_1)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)x_n\mathrm{d}s) - Au\|\ \|x_{n+1} - u\| + \|d_n\|$$

因此

$$\|x_n - y_n\|^2 \leqslant (\|x_{n+1} - u\| + \|x_n - u\|)(\|x_{n+1} - x_n\|) + 2\lambda_n\|x_n - y_n\|\ \|B_2x_n - B_2u\| +$$
$$2\beta_n(1 - \alpha_n\bar{\gamma})\|y_n - u\|\ \|x_n - \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)y_n\mathrm{d}s\| + \beta_n^2\|x_n - \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)y_n\mathrm{d}s\|^2 +$$
$$2\alpha_n\|\gamma f(P_C(I - \lambda_nB_1)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)x_n\mathrm{d}s) - Au\|\ \|x_{n+1} - u\| + \|d_n\|$$

再由 $\alpha_n \to 0$, $\|d_n\| \to 0$, $\|x_{n+1} - x_n\| \to 0$, $\|B_2x_n - B_2u\| \to 0$, $\|x_n - \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)y_n\mathrm{d}s\| \to 0(n \to \infty)$,可得 $\|x_n - y_n\| \to 0(n \to \infty)$,从而

$$\|\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)y_n\mathrm{d}s - y_n\| \leqslant \|x_n - y_n\| + \|\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)y_n\mathrm{d}s - x_n\| \to 0(n \to \infty)$$

因为对 $\forall x, y \in C$,有

$$\|P_F(\gamma f + (I - A))x - P_F(\gamma f + (I - A))y\| \leqslant \gamma\|x - y\| - \gamma\Psi(\|x - y\|) +$$
$$(1 - \bar{\gamma})\|x - y\| = (1 - (\bar{\gamma} - \gamma))\|x - y\| - \gamma\Psi(\|x - y\|)$$

所以 $P_F(\gamma f + (I - A))$ 是具有这类 $C_{\gamma\Psi(s)}$ 的弱压缩映象. 因此根据引理1,存在唯一不动点 $q \in C$,使得 $q = P_F(\gamma f + (I - A))q$,进而 $q \in F$. 下面证明 q 是变分不等式 ⑧ 的唯一解. 假设 q_1 和 q_2 是变分不等式 ⑧ 的两个解,即 $\langle(\gamma f(q_1) - Aq_1), p - q_1\rangle \leqslant 0$,$\langle(\gamma f(q_2) - Aq_2), p - q_2\rangle \leqslant 0$,将上述不等式相减,并使用引理4 可得

$$(\bar{\gamma} - \gamma)\|q_1 - q_2\|^2 + \gamma\Psi(\|q_1 - q_2\|)\|q_1 - q_2\| \leqslant \langle(Ag - \gamma f)q_1 - (Ag - \gamma f)q_2, q_1 - q_2\rangle \leqslant 0$$

由于 $\forall s > 0, \Psi(s) > 0, \Psi(0) = 0$,所以 $\|q_1 - q_2\| = 0$,即 $q_1 = q_2$,因此 q 是变分不等式 ⑧ 的唯一解.

下面证明 $\limsup_{n\to\infty}\langle\gamma f(q) - Aq, x_n - q\rangle \leqslant 0$. 取 $\{x_n\}$ 的一个子列 $\{x_{n_i}\}$,使得 $\limsup_{n\to\infty}\langle\gamma f(q) - Aq, x_{n_i} - q\rangle = \lim_{t\to\infty}\langle\gamma f(q) - Aq, x_{n_i} - q\rangle$. 又由 $\{y_n\}$ 的子列 $\{y_{n_i}\}$ 有界,存在 $\{y_{n_i}\}$ 的一个子列 $\{y_{n_{i_j}}\}$ 弱收敛于 z. 不失一般性,可设 $y_{n_i} \to z$. 现证 $z \in F(S) \cap VI(C, B_1) \cap VI(C, B_2)$.

首先由定理1 的证明易知 $z \in F(S)$. 其次令 $Q_iv = \begin{cases} B_iv + N_Cv, v \in C \\ \varnothing, v \notin C \end{cases}$,其中 $i = 1,2$,则 $Q_i(i = 1,2)$ 是最大单调的, 由定理 1 的证明易知 $z \in VI(C, B_1) \cap VI(C, B_2)$, 从而 $z \in F(S) \cap VI(C, B_1) \cap VI(C, B_2)$. 再由 $\|x_n - y_n\| \to 0(n \to \infty)$,可知 $x_{n_i} \to z(i \to \infty)$. 因 $q = P_F(\gamma f + (I -$

$A))q$,有

$$\limsup_{n\to\infty}\langle \gamma f(q) - Aq, x_n - q\rangle = \lim_{i\to\infty}\langle \gamma f(q) - Aq, x_{n_i} - q\rangle = \langle \gamma f(q) - Aq, z - q\rangle \leqslant 0$$

令 $\zeta_n = \max\{\langle \gamma f(q) - Aq, x_n - q\rangle, 0\}$,则易知 $\zeta_n \geqslant 0$ 且 $\lim_{n\to\infty}\zeta_n = 0$.

最后证明 $x_n \to q(n\to\infty)$. 事实上由 ⑦ 式和引理 6,有

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - q\|^2 = {} & \|\alpha_n(\gamma f(P_C(I - \lambda_n B_1)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)x_n\mathrm{d}s) - Aq) + \beta_n(x_n - q) + \\
& ((1-\beta_n)I - \alpha_n A)(P_C(I - \lambda_n B_2)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)x_n\mathrm{d}s - q) + d_n\|^2 \leqslant \\
& \|\beta_n(x_n - q) + ((1-\beta_n)I - \alpha_n A)(P_C(I - \lambda_n B_2)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)x_n\mathrm{d}s - q)\|^2 + \\
& 2\alpha_n\langle \gamma f(P_C(I - \lambda_n B_1)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)x_n\mathrm{d}s) - Aq, x_{n+1} - q\rangle + 2\langle d_n, x_{n+1} - q\rangle \leqslant \\
& [(1 - \beta_n - \alpha_n\bar{\gamma})\|x_n - q\| + \beta_n\|x_n - q\|]^2 + 2\alpha_n\gamma\|x_n - q\|\|x_{n+1} - q\| - \\
& 2\alpha_n\gamma\Psi(\|x_{n+1} - q\|) + 2\alpha_n\langle \gamma f(q) - Aq, x_{n+1} - q\rangle + 2\|d_n\|\|x_{n+1} - q\| \leqslant \\
& (1 - \alpha_n\bar{\gamma})^2\|x_n - q\|^2 + \alpha_n\gamma(\|x_n - q\|^2 + \|x_{n+1} - q\|^2) + \\
& 2\alpha_n\langle \gamma f(q) - Aq, x_{n+1} - q\rangle + \|d_n\|(1 + \|x_{n+1} - q\|^2)
\end{aligned}$$

因 $1 - \|d_n\| - \alpha_n\gamma \to 1(n\to\infty)$,所以 $\exists n_1 > 1, \forall n > n_1$,有 $\frac{1}{2} < 1 - \|d_n\| - \alpha_n\gamma < 1$. 进而有

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - q\|^2 \leqslant {} & \frac{(1 - \alpha_n\bar{\gamma})^2 + \alpha_n\gamma}{1 - \|d_n\| - \alpha_n\gamma}\|x_n - q\|^2 + \frac{\|d_n\|}{1 - \|d_n\| - \alpha_n\gamma} + \\
& \frac{2\alpha_n}{1 - \|d_n\| - \alpha_n\gamma}(\gamma f(q) - Aq, x_{n+1} - q) = \\
& \left(1 - \frac{2\alpha_n(\bar{\gamma} - \gamma)}{1 - \|d_n\| - \alpha_n\gamma}\right)\|x_n - q\|^2 + \frac{\|d_n\|}{1 - \|d_n\| - \alpha_n\gamma}(1 + \|x_n - q\|^2) + \\
& \frac{2\alpha_n}{1 - \|d_n\| - \alpha_n\gamma}\left(\langle \gamma f(q) - Aq, x_{n+1} - q\rangle + \frac{\alpha_n\bar{\gamma}^2}{2}\|x_n - q\|^2\right) \leqslant \\
& (1 - 2\alpha_n(\bar{\gamma} - \gamma))\|x_n - q\|^2 + 2\|d_n\|(1 + K) + 4\alpha_n(\xi_{n+1} + \alpha_n K)
\end{aligned}$$

其中 $K = \left(1 + \frac{\bar{\gamma}^2}{2}\right)\sup_{n\geqslant 0}\|x_n - q\|^2$. 取 $a_n = \|x_n - q\|^2, b_n = 4\alpha_n(\xi_{n+1} + \alpha_n K), c_n = 2\|d_n\|(1 + K)$, $\omega_n = 2\alpha_n(\bar{\gamma} - \gamma)$,由引理 5 可知 $x_n \to q(n\to\infty)$.

3 结语

本文引入更为一般的非扩张半群隐式和显式黏滞迭代算法,在 Hilbert 空间中建立了非扩张半群的公共不动点集与具有强单调型映象的变分不等式解集的公共元素的强收敛定理,推广并改进了相关文献中的结果,其对研究非线性变分不等式解的存在性与迭代收敛性问题,具有重要的理论意义.

参考文献:

[1] ALBER Y I, GUERRE-DELABRIERE S. Principles of weakly contractive maps in Hilbert spaces[J]. Oper Theory and Appl, 1997, 98:7.
[2] TAKAHASHI W, TOYODA M. Weak convergence theorems for nonexpansive mappings and monotone mappings[J]. J Optim Theory Appl, 2003, 118:417.
[3] CHEN J M, ZHANG L J, FAN T G. Viscosity approximation methods for nonexpansive mappings and monotone mappings[J]. J Math Anal Appl, 2007, 334:1450.
[4] RAZAMI A, YAZDI Y. An iterative method for a family nonexpansive mappings[J]. Math Reports, 2014, 16(66):7.
[5] PLUBTIENG S, PUNPAENG R. Fixed-point solutions of variational inequalities for nonexpansive semigroups in Hilbert spaces[J]. Math Comput Modell, 2008, 48(1-2):279.
[6] PLUBTIENG S, WANGKEEREE R. A general viscosity approximation method of fixed point solutions of variational inequalities for nonexpansive semigroups in Hilbert spaces[J]. Bull Korean Math Soc, 2008, 45 (4):717.
[7] ZHANG D, QIN X, GU F. Approximation of common fixed points of nonexpansive semigroups in Hilbert spaces[J]. Journal of Applied Mathematics, doi:10.1155/2012/417234.
[8] 张树义. 一致 Lipschitz 渐近 φ_i - 型拟伪压缩映象多步平行迭代算法的收敛性[J]. 系统科学与数学, 2013, 33(11):1233.
[9] 张树义, 宋晓光. 非 Lipschitz 有限族集值广义渐近 φ - 半压缩映象的强收敛定理[J]. 系统科学与数学, 2014, 34(9):1051.
[10] 张树义. 赋范线性空间中渐近拟伪压缩型映象不动点的修改的广义 Ishikawa 迭代逼近[J]. 应用数学学报, 2011, 34(5):886.
[11] 张树义, 赵美娜, 李丹. 渐近半压缩映象具混合型误差的迭代收敛性[J]. 北华大学学报(自然科学版), 2015, 16(3):165.
[12] 赵美娜, 张树义, 赵亚莉. 有限族广义一致伪 Lipschitz 映象公共不动点的迭代收敛性[J]. 烟台大学学报(自然科学与工程版), 2017, 30(1):7.
[13] 张树义, 李丹, 丛培根. 增生算子零点的迭代逼近[J]. 北华大学学报(自然科学版), 2017, 18(2):1.
[14] 赵美娜, 张树义, 郑晓迪. 一类算子方程迭代序列的稳定性[J]. 轻工学报, 2016, 31(6):100.
[15] 林媛, 张树义, 李丹. Banach 空间中渐近非扩张型映象 Reich-Takahashi 迭代序列的收敛性[J]. 烟台大学学报(自然科学与工程版), 2017, 18(3):185.
[16] 赵美娜, 张树义, 赵亚莉. 渐近伪压缩型映象不动点的迭代逼近[J]. 数学的实践与认识, 2016, 46(15):264.
[17] 张树义, 李丹, 林媛, 等. 非自渐近非扩张型映象具误差的 Reich-Takahashi 粘滞迭代逼近[J]. 北华大学学报(自然科学版), 2017, 18(3):287.
[18] 张树义, 林媛, 郑晓迪. 强增生映像零点的迭代逼近[J]. 浙江师范大学学报(自然科学版), 2017, 40(2):127.
[19] 李丹, 张树义, 丛培根. φ - 强增生算子方程解的 Noor 三步迭代收敛率的估计[J]. 鲁东大学学报(自然科学版), 2017, 33 (3):193.

(下转第 108 页)

66.

[11] 林媛,张树义. 2 - 距离空间中带有对称函数的非唯一不动点定理[J]. 北华大学学报(自然科学版),2017,18(5):572.

[12] 张树义,宋晓光,栾丹. Φ - 压缩映象的公共不动点定理[J]. 北华大学学报(自然科学版),2014,15(2):167.

[13] 万美玲,张树义,郑晓迪. 2 - 距离空间中非唯一不动点定理[J]. 轻工学报,2017,32(4):105.

[14] 张树义,林媛. $\Phi - \varphi$ - 型压缩映象不动点的存在性[J]. 北华大学学报(自然科学版),2016,17(1):1.

[15] 张树义,赵美娜,刘冬红. 弱相容映射的几个新的公共不动点定理[J]. 江南大学学报(自然科学版),2015,14(6):852.

[16] 刘冬红,张树义,郑晓迪. 2 - 距离空间中一类压缩型映象的不动点定理[J]. 南通大学学报(自然科学版),2016,15(2):68.

[17] 赵美娜,张树义. 关于 2 - 渐近正则映象的一个注记[J]. 鲁东大学学报(自然科学版),2016,32(3):193.

[18] 赵美娜,张树义,郑晓迪. 2 - 距离空间中 Fisher 型映象的公共不动点定理[J]. 杭州师范大学学报(自然科学版),2016,15(6):632.

[19] 赵美娜,张树义,郑晓迪. 关于非唯一不动点的一个注记[J]. 杭州师范大学学报(自然科学版),2017,16(3):321.

[20] 张树义,赵美娜,丛培根. 模糊度量空间中 Φ - 压缩型映象不动点定理及应用[J]. 南通大学学报(自然科学版),2017,16(3):66.

(上接第 100 页)

[20] 林媛,丛培根,张树义. 带混合误差的粘滞迭代算法的强收敛定理[J]. 南阳师范学院学报(自然科学版),2017,16(9):15.

[21] 丛培根,张芯语,张树义. 两有限族映象迭代序列的稳定性[J]. 鲁东大学学报(自然科学版),2017,33(4):296.

[22] 张树义,赵美娜,丛培根. 广义渐近 S - 半压缩型映象迭代逼近[J]. 西华师范大学学报(自然科学版),2017,38(4):399.

[23] 刘冬红,张树义,丛培根. 渐近伪压缩型半群不动点的隐式迭代逼近[J]. 西华大学学报(自然科学版),2017,36(6):105.

[24] 林媛,张树义,丛培根. 渐近非扩张型映象具有误差的迭代收敛性[J]. 石河子大学学报(自然科学版),2017,35(4):513.

[25] 李丹,张树义,赵美娜. Φ - 伪压缩映象迭代序列的收敛性与稳定性[J]. 烟台大学学报(自然科学与工程),2017,30(2):79.

[26] MARINO G,XU H K. A general iterative method for nonexpansive mappings in Hilbert spaces[J]. J Math Anal Appl,2006,318(1):43.

[27] SHIMIZU T,TAKAHASHI W. Strong convergence to common fixed points of nonexpansive mappings[J]. J Math Anal Appl,1997,211(1):71.

[28] LIU L S. Ishikawa and Mann iterative process with errors for nonlinear strongly accretive mappings in Banach spaces[J]. J Math Anal Appl,1995,194 (1):114.