引用格式:张芯语,张树义,聂辉. 积分型轨道压缩映象的不动点定理研究[J]. 轻工学报,2019,34(3):103 - 108.
中图分类号:O177.91 **文献标识码**:A
DOI:10.3969/j.issn.2096 - 1553.2019.03.012
文章编号:2096 - 1553(2019)03 - 0103 - 06

积分型轨道压缩映象的不动点定理研究

Research on fixed point theorem for integral type orbitally contractive mappings

关键词:
Φ - φ - 型映象;
Altman 型映象;积分型轨道压缩映象;不动点

Key words:
Φ-φ-type mapping;
Altman type mapping;
integral type orbitally contractive mapping;
fixed point

张芯语,张树义,聂辉
ZHANG Xinyu,ZHANG Shuyi,NIE Hui

渤海大学 数理学院,辽宁 锦州 121013
College of Mathematics and Physics,Bohai University,Jinzhou 121013,*China*

摘要:在完备度量空间和 2 - 距离空间中研究积分型轨道压缩映象不动点的存在性,在一定条件下证明了积分型轨道压缩映象的不动点定理,从而将相关文献中的结果推广到了积 Φ - φ - 型轨道压缩映象类和积分 Altman 型轨道压缩映象类.

收稿日期:2019 - 03 - 13
基金项目:渤海大学研究生创新基金项目(YJC20170036)
作者简介:张芯语(1994—),女,辽宁省铁岭市人,渤海大学硕士研究生,主要研究方向为非线性泛函分析.
通信作者:张树义(1960—),男,辽宁省锦州市人,渤海大学教授,主要研究方向为非线性泛函分析.

Abstract: The existence of fixed point for integral type orbitally contractive mappings in complete metric spaces and 2-metric spaces was studied, the fixed point theorem for integral type orbitally contractive mappings was proved under certain conditions, which extended some known results in the related literature to integral Φ-φ-type orbital compression mapping class and integral Altman type orbital compression mapping class.

关于轨道压缩映象不动点的存在性,文献[1-4]已做过研究,其中,文献[2]在完备 2-距离空间中研究了 $\Phi-\varphi$-型轨道压缩映象不动点的存在性,文献[3]在完备度量空间中研究了 Altman 型轨道压缩映象不动点的存在性. 而文献[5-13]研究了若干 Altman 型映象类不动点的存在性定理,其中,文献[7]研究了积分型 Altman 映象不动点的存在性. 基于上述工作,本文拟在完备度量空间和 2-距离空间中研究积分型轨道压缩映象不动点的存在性, 建立积分型轨道压缩映象不动点的存在性定理, 从而推广和改进已有文献中的相应结果.

1　预备知识

全文用 Z^+ 表示正整数集,$R^+=[0,+\infty)$,设(X,d) 为度量空间或 2-距离空间,T 是 $X\to X$ 的映射, 对 $\forall x\in X$, 称 $O(x,0,\infty)=\{T^n x\mid n\in Z^+\cup\{0\}\}$ 为 T 在 x 处的轨道. $O(x,i,\infty)=\{T^r x\mid r=i,i+1,\cdots\}$,$O(x,y;0,\infty)=O(x;0,\infty)\cup O(y;0,\infty)$,如果对 $\forall x\in X$,每一包含于 $O(x,0,\infty)$ 内的 Cauchy 列在 X 内收敛,则称空间(X,d) 是 T 轨道完备的. 设 $d:X\times X\to R^+$,$f:X\times X\times X\to R^+$,记

$$\delta(A)=\sup\{d(x,y)\mid x,y\in A\subset X\}$$

$$\delta_{a,f}(A)=\sup\{f(x,y,a)\}\mid x,y,a\in A\subset X\}$$

关于完备的 2-距离空间等概念可在相关文献中查到. 设

$$\Phi_1=\{\Phi\mid\Phi:[0,+\infty)\to[0,+\infty),\lim_{\eta\to t}\sup_{0\leqslant\eta\leqslant t}\Phi(\eta)<t,\forall t>0\};$$

$$\Phi_2=\{\Phi\mid\Phi:[0,+\infty)\to[0,+\infty),\Phi(t)<t,\forall t>0\};$$

$$\Phi_3=\{\Phi\mid\Phi:[0,+\infty)\to[0,+\infty),\sum_{n=1}^{\infty}\Phi^n(t)<\infty,\forall t\geqslant 0\};$$

$$\Phi_4=\{\Phi\mid\Phi:[0,+\infty)\to[0,+\infty)\text{ 是递增函数,满足}(c_1),(c_2)\text{ 和}(c_3)\}.$$

其中

(c_1) $0<\Phi(t)<t,\forall t>0$;

(c_2) 函数 $p(t)=\dfrac{t}{t-\Phi(t)}$ 递减;

(c_3) 对 $t_1>0$, 积分$\int_D^{t_1}p(t)\mathrm{d}t<+\infty$.

例 1　在$[0,+\infty)$上取$\varphi_1(t)=kt,0<k<1,\varphi_2(t)=\dfrac{t}{2+t}$,则$\varphi_1(t),\varphi_2(t)\in\Phi_1,\Phi_2$ 和 Φ_4,$\varphi_1(t)\in\Phi_3$.

注 1　易知若 $\Phi\in\Phi_3$ 或 $\Phi\in\Phi_4$,则 $\Phi\in\Phi_2$. 由文献[1-2,4]可知,若 $\Phi\in\Phi_1$,则 $\Phi\in\Phi_2$;若 $\Phi\in\Phi_4$,则 $\Phi(t)=t\Leftrightarrow t=0$.

引理 1[1-2,4]　设 $\Phi\in\Phi_1$,则

i) $\Phi \in \Phi_2$;

ii) 设 $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$, $\{b_n\}_{n\geqslant 0}$ 是两个非负实数列,满足 $a_{n+1} \leqslant \Phi(a_n) + b_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$,则 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

2 主要结果

定理 1 设 (X,d) 是完备的 2 - 距离空间, $T: X \to X$ 连续, $f: X \times X \times X \to [0, +\infty)$ 是对称有界的连续函数. 对 $\forall x \in X$, $\forall a \in X$, $\delta_{a,d}(O_T(x;0,\infty)) < \infty$, $\delta_{a,f}(O_T(x;0,\infty)) < \infty$, 若存在正整数 p,q,使

$$\begin{cases} \int_0^{\delta_{a,f}(O_T(T^p x, T^q y,\infty))} \Psi(\tau)\mathrm{d}\tau \leqslant \varphi\left(\int_0^{\delta_{a,f}(O_T(x,y,\infty))} \Psi(\tau)\mathrm{d}\tau\right) \\ \int_0^{\delta_{a,d}(O_T(T^p x, T^q y,\infty))} \Psi(\tau)\mathrm{d}\tau \leqslant \Phi\left(\int_0^{\delta_a(O_T(x,y;0,\infty))} \Psi(\tau)\mathrm{d}\tau\right) + \varphi\left(\int_0^{\delta_{a,f}(O_T(T^p x, T^q y,\infty))} \Psi(\tau)\mathrm{d}\tau\right) \end{cases} \quad ①$$

其中, $\Phi \in \Phi_1$, $\varphi \in \Phi_3$, $\Psi: R^+ = [0, +\infty) \to R^+$ 是勒贝格可积且 $\int_0^{\varepsilon} \Psi(t)\mathrm{d}t > 0$, $\varepsilon > 0$,则 T 在 X 中存在唯一不动点,而且对 $\forall x_0 \in X$,迭代序列 $\{T^n x_0\}$ 收敛于这一不动点.

证明 设 $p \geqslant q$, 对 $\forall x, a \in X$, $k \geqslant 0$,由式 ① 有

$$\begin{cases} \int_0^{f(T^p x, T^{p+k} x, a)} \Psi(\tau)\mathrm{d}\tau \leqslant \varphi\left(\int_0^{\delta_{a,f}(O_T(x, T^{p-q+k};0,\infty))} \Psi(\tau)\mathrm{d}\tau\right) = \\ \varphi\left(\int_0^{\delta_{a,f}(O_T(x;0,\infty)\cup O_T(T^{p-q+k}x;0,\infty))} \Psi(\tau)\mathrm{d}\tau\right) \leqslant \varphi\left(\int_0^{\delta_{a,f}(O_T(x;0,\infty))} \Psi(\tau)\mathrm{d}\tau\right) \\ \int_0^{d(T^p x, T^{p+k} x, a)} \Psi(\tau)\mathrm{d}\tau \leqslant \Phi\left(\int_0^{\delta_a(O_T(x, T^{p-q+k};0,\infty))} \Psi(\tau)\mathrm{d}\tau\right) + \varphi\left(\int_0^{\delta_{a,f}(O_T(T^p x, T^q y,\infty))} \Psi(\tau)\mathrm{d}\tau\right) = \\ \Phi\left(\int_0^{\delta_a(O_T(x;0,\infty)\cup O_T(T^{p-q+k}x;0,\infty))} \Psi(\tau)\mathrm{d}\tau\right) + \varphi\left(\int_0^{\delta_{a,f}(O_T(x;0,\infty)\cup O_T(T^{p-q+k}x;0,\infty))} \Psi(\tau)\mathrm{d}\tau\right) = \\ \Phi\left(\int_0^{\delta_{a,d}(O_T(x;0,\infty))} \Psi(\tau)\mathrm{d}\tau\right) + \varphi\left(\int_0^{\delta_{a,f}(O_T(x;0,\infty))} \Psi(\tau)\mathrm{d}\tau\right) \end{cases}$$

由 $k \geqslant 0$ 的任意性可知,对 $\forall x, a \in X$,有

$$\begin{cases} \int_0^{\delta_{a,f}(O_T(T^p x;0,\infty))} \Psi(\tau)\mathrm{d}\tau \leqslant \varphi\left(\int_0^{\delta_{a,f}(O_T(x;0,\infty))} \Psi(\tau)\mathrm{d}\tau\right) \\ \int_0^{\delta_{a,d}(O_T(T^p x;0,\infty))} \Psi(\tau)\mathrm{d}\tau \leqslant \Phi\left(\int_0^{\delta_{a,d}(O_T(x;0,\infty))} \Psi(\tau)\mathrm{d}\tau\right) + \varphi\left(\int_0^{\delta_{a,f}(O_T(x;0,\infty))} \Psi(\tau)\mathrm{d}\tau\right) \end{cases}$$

即 $\forall x, a \in X$,有

$$\begin{cases} \int_0^{\delta_{a,f}(O_T(x;p,\infty))} \Psi(\tau)\mathrm{d}\tau \leqslant \varphi\left(\int_0^{\delta_{a,f}(O_T(x;0,\infty))} \Psi(\tau)\mathrm{d}\tau\right) \\ \int_0^{\delta_{a,d}(O_T(x;p,\infty))} \Psi(\tau)\mathrm{d}\tau \leqslant \Phi\left(\int_0^{\delta_{a,d}(O_T(x;0,\infty))} \Psi(\tau)\mathrm{d}\tau\right) + \varphi\left(\int_0^{\delta_{a,f}(O_T(x;0,\infty))} \Psi(\tau)\mathrm{d}\tau\right) \end{cases}$$

据此,对 $\forall x_0 \in X$,可得

$$\begin{cases} \int_0^{\delta_{a,f}(O_T(T^{np}x_0;p,\infty))} \Psi(\tau)\mathrm{d}\tau \leqslant \varphi\left(\int_0^{\delta_{a,f}(O_T(T^{np}x_0;0,\infty))} \Psi(\tau)\mathrm{d}\tau\right) \\ \int_0^{\delta_{a,d}(O_T(T^{np}x_0;p,\infty))} \Psi(\tau)\mathrm{d}\tau \leqslant \Phi\left(\int_0^{\delta_{a,d}(O_T(T^{np}x_0;0,\infty))} \Psi(\tau)\mathrm{d}\tau\right) + \varphi\left(\int_0^{\delta_{a,f}(O_T(T^{np}x_0;0,\infty))} \Psi(\tau)\mathrm{d}\tau\right) \end{cases}$$

从而

$$\int_0^{\delta_{a,d}(O_T(x_0;(m+1)p,\infty))}\Psi(\tau)\mathrm{d}\tau \leqslant \Phi\left(\int_0^{\delta_{a,d}(O_T(x_0;mp,\infty))}\Psi(\tau)\mathrm{d}\tau\right)+\varphi\left(\int_0^{\delta_{a,f}(O_T(x_0;mp,\infty))}\Psi(\tau)\mathrm{d}\tau\right) \quad ②$$

$$\int_0^{\delta_{a,f}(O_T(x;(m+1)p,\infty))}\Psi(\tau)\mathrm{d}\tau \leqslant \varphi\left(\int_0^{\delta_{a,f}(O_T(x;mp,\infty))}\Psi(\tau)\mathrm{d}\tau\right) \leqslant \varphi^{m+1}\left(\int_0^{\delta_{a,f}(O_T(x;0,\infty))}\Psi(\tau)\mathrm{d}\tau\right) \quad ③$$

将 ③ 代入 ② 得

$$\int_0^{\delta_{a,d}(O_T(x_0;(m+1)p,\infty))}\Psi(\tau)\mathrm{d}\tau \leqslant \Phi\left(\int_0^{\delta_{a,d}(O_T(x_0;mp,\infty))}\Psi(\tau)\mathrm{d}\tau\right)+\varphi^m\left(\int_0^{\delta_{a,f}(O_T(x;0,\infty))}\Psi(\tau)\mathrm{d}\tau\right) \quad ④$$

如果存在 m_0 使得 $\int_0^{\delta_{a,d}(O_T(x_0;m_0p,\infty))}\Psi(\tau)\mathrm{d}\tau = 0$，则 $T^{m_0p}x_0$ 是 T 在 X 中的不动点. 如果 $\int_0^{\delta_{a,d}(O_T(x_0;mp,\infty))}\Psi(\tau)\mathrm{d}\tau > 0$，取

$$\int_0^{\delta_{a,d}(O_T(x_0;mp,\infty))}\Psi(\tau)\mathrm{d}\tau = a_m, b_m = \varphi^m\left(\int_0^{\delta_{a,f}(O_T(x;0,\infty))}\Psi(\tau)\mathrm{d}\tau\right)$$

由式 ④ 和引理 1 可得

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^{\delta_{a,d}(O_T(x_0;mp,\infty))}\Psi(\tau)\mathrm{d}\tau = 0, \forall a \in X$$

上式表明序列 $x_n = T^n x_0$ 是 2 - 距离空间的 Cauchy 列，依据 X 的完备性，可设 $x_n \to x_* \in X$，由 T 的连续性可知，x_* 是 T 的不动点. 设 $y_* \in X$ 也是 T 的不动点，若 $\int_0^{f(x_*,y_*,a)}\Psi(\tau)\mathrm{d}\tau > 0, \forall a \in X$，由 $\varphi \in \Phi_3$，可有

$$\int_0^{f(x_*,y_*,a)}\Psi(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_0^{\delta_{a,f}(O_T(x_*,y_*,0,\infty))}\Psi(\tau)\mathrm{d}\tau \leqslant \varphi\left(\int_0^{\delta_{a,f}(O_T(x_*,y_*,0,\infty))}\Psi(\tau)\mathrm{d}\tau\right) =$$

$$\varphi\left(\int_0^{f(x_*,y_*,a)}\Psi(\tau)\mathrm{d}\tau\right) < \int_0^{f(x_*,y_*,a)}\Psi(\tau)\mathrm{d}\tau$$

所以 $\int_0^{f(x_*,y_*,a)}\Psi(\tau)\mathrm{d}\tau = 0$. 若 $\int_0^{d(x_*,y_*,a)}\Psi(\tau)\mathrm{d}\tau > 0, \forall a \in X$，由 $\Phi \in \Phi_1$，式 ① 有

$$\int_0^{d(x_*,y_*,a)}\Psi(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_0^{\int_0^{\delta_{a,d}(O_T(x_*,y_*,0,\infty))}\Psi(\tau)\mathrm{d}\tau}\Psi(\tau)\mathrm{d}\tau \leqslant \Phi\left(\int_0^{\delta_{a,d}(O_T(x_*,y_*,0,\infty))}\Psi(\tau)\mathrm{d}\tau\right)+$$

$$\varphi\left(\int_0^{\delta_{a,f}(O_T(x_*,y_*,0,\infty))}\Psi(\tau)\mathrm{d}\tau\right) = \Phi\left(\int_0^{d(x_*,y_*,a)}\Psi(\tau)\mathrm{d}\tau\right) < \int_0^{d(x_*,y_*,a)}\Psi(\tau)\mathrm{d}\tau$$

所以 $\int_0^{d(x_*,y_*,a)}\Psi(\tau)\mathrm{d}\tau = 0$，从而 $x_* = y_*$，即 x_* 是 T 的唯一不动点. 证毕.

定理 2　设 (X,d) 是完备的度量空间，$T: X \to X$ 是连续映象，对 $\forall x \in X, \delta(O_T(x;0,\infty)) < \infty$，若存在正整数 p,q，使得

$$\int_0^{d(T^p x, T^q y)}\Psi(\tau)\mathrm{d}\tau \leqslant \Phi\left(\int_0^{\delta(O_T(x,y;0,\infty))}\Psi(\tau)\mathrm{d}\tau\right) \quad ⑤$$

其中，$\Phi \in \Phi_4$，$\Psi: R^+ = [0, +\infty) \to R^+$ 是勒贝格可积与可和的，即 $\forall a,b \in R^+$，有 $\int_0^{a+b}\Psi(\tau)\mathrm{d}\tau \leqslant \int_0^a \Psi(\tau)\mathrm{d}\tau + \int_0^b \Psi(\tau)\mathrm{d}\tau$ 且 $\int_0^{\varepsilon}\Psi(\tau)\mathrm{d}\tau > 0, \varepsilon > 0$，则 T 在 X 中存在唯一不动点，而且对 $\forall x_0 \in X$，迭代序列 $\{T^n x_0\}$ 收敛于这一不动点.

证明 设 $p \geqslant q$. 对 $\forall x \in X, k \geqslant 0$,由式⑤有

$$\int_0^{d(T^p x, T^{p+k} x)} \Psi(\tau)\mathrm{d}\tau \leqslant \Phi\left(\int_0^{\delta(O_T(x, T^{p-q+k}; 0, \infty))} \Psi(\tau)\mathrm{d}\tau\right) =$$

$$\Phi\left(\int_0^{\delta(O_T(x;0,\infty)\cup O_T(T^{p-q+k}x;0,\infty))} \Psi(\tau)\mathrm{d}\tau\right) \leqslant \Phi\left(\int_0^{\delta(O_T(x;0,\infty))} \Psi(\tau)\mathrm{d}\tau\right)$$

根据上式中 $k \geqslant 0$ 的任意性,有 $\int_0^{\delta(O_T(T^p x;0,\infty))} \Psi(\tau)\mathrm{d}\tau \leqslant \Phi\left(\int_0^{\delta(O_T(x;0,\infty))} \Psi(\tau)\mathrm{d}\tau\right)$,即

$$\int_0^{\delta(O_T(x;p,\infty))} \Psi(\tau)\mathrm{d}\tau \leqslant \Phi\left(\int_0^{\delta(O_T(x;0,\infty))} \Psi(\tau)\mathrm{d}\tau\right) \qquad \forall x \in X \tag{⑥}$$

对 $\forall x_0 \in X$,由式⑥可得 $\int_0^{\delta(O_T(T^{np}x_0;p,\infty))} \Psi(\tau)\mathrm{d}\tau \leqslant \Phi\left(\int_0^{\delta(O_T(T^{np}x_0;0,\infty))} \Psi(\tau)\mathrm{d}\tau\right)$,从而

$$\int_0^{\delta(O_T(x_0;(n+1)p,\infty))} \Psi(\tau)\mathrm{d}\tau \leqslant \Phi\left(\int_0^{\delta(O_T(x_0;np,\infty))} \Psi(\tau)\mathrm{d}\tau\right) \tag{⑦}$$

如果存在 $n_0 \in Z^+$, 使得 $\int_0^{\delta(O_T(x_0;n_0p,\infty))} \Psi(\tau)\mathrm{d}\tau = 0$, 则 $T^{n_0p}x_0$ 是 T 在 X 中的不动点, 显然 $\lim\limits_{n\to\infty} T^n x_0 = T^{n_0p}x_0$. 如果 $\forall n \in Z^+$, $\int_0^{\delta(O_T(x_0;np,\infty))} \Psi(\tau)\mathrm{d}\tau > 0$. 由式⑦可知, $\left\{\int_0^{\delta(O_T(x_0;np,\infty))} \Psi(\tau)\mathrm{d}\tau\right\}$是严格递减的非负实数列,从而$\left\{\int_0^{\delta(O_T(x_0;np,\infty))} \Psi(\tau)\mathrm{d}\tau)\right\}$收敛. 对 $\forall m, n \in Z^+, n \leqslant m$,由式⑦有

$$\int_0^{d(x_n,x_m)} \Psi(\tau)\mathrm{d}\tau \leqslant \sum_{i=n}^{m-1} \int_0^{\delta(O_T(x_0;ip,\infty))} \Psi(\tau)\mathrm{d}\tau \leqslant$$

$$\sum_{i=n}^{m-1} \frac{\int_0^{\delta(O_T(x_0;ip,\infty))} \Psi(\tau)\mathrm{d}\tau\left(\int_0^{\delta(O_T(x_0;ip,\infty))} \Psi(\tau)\mathrm{d}\tau - \int_0^{\delta(O_T(x_0;(i+1)p,\infty))} \Psi(\tau)\mathrm{d}\tau\right)}{\int_0^{\delta(O_T(x_0;ip,\infty))} \Psi(\tau)\mathrm{d}\tau - \Phi\left(\int_0^{\delta(O_T(x_0;ip,\infty))} \Psi(\tau)\mathrm{d}\tau\right)} \leqslant \int_{\int_0^{\delta(O_T(x_0;np,\infty))} \Psi(\tau)\mathrm{d}\tau}^{\int_0^{\delta(O_T(x_0;np,\infty))} \Psi(\tau)\mathrm{d}\tau} p(t)\mathrm{d}t$$

由 $\Phi \in \Phi_4$ 易知, $\{x_n = T^n x_0\}$ 是 X 中的 Cauchy 列. 由 X 的完备性,可设 $x_n \to x_* \in X$,易证 x_* 是 T 的唯一不动点. 证毕.

3 结语

轨道压缩映象和积分型压缩映象是两类比较广泛的非线性映象,本文将两者结合, 在完备度量空间和 2 - 距离空间中分别研究积分型轨道压缩映象不动点的存在性,借助相关引理建立了积分型轨道压缩映象不动点的存在性定理, 最终将相关文献中的结果推广到了积 $\Phi - \varphi -$ 型轨道压缩映象类和积分 Altman 型轨道压缩映象类的情形,扩展了相关定理的适用范围.

参考文献:

[1] ZHANG S Y, WANG L, SHIN S H, et al. Common fixed point theorems for a pair of orbitally contraction mapping[J]. Fixed Point Theory and Applictions, 2003, 5: 191.

[2] 张树义,林媛. $\Phi - \varphi -$ 型压缩映象不动点的存在性[J]. 北华大学学报(自然科学版), 2016, 17(1): 1.

[3] 丛培根,张芯语,张树义. Altman 型轨道压缩映象的不动点定理[J]. 南阳师范学院学报, 2018, 17(1): 1.

[4] 郑晓迪,万美玲,张树义. 轨道压缩映射的几个新的不动点定理[J]. 北华大学学报(自然科学版), 2014, 15(4): 438.

[5] ALTMAN M. An integral test for series and generalized contractions[J]. Amer MathMonthly,1975,82(8): 827.

[6] CARBONE A,SINGH S P. Fixed point theorems for Altman type mappings[J]. Indian J Pure Appl Math, 1987,18(12):1082.

[7] LI Y,GU F. Common fixed point theorem of Altman integral type mapping[J]. The Journal of Nonlinear Sciences and Applications,2009 (2): 214.

[8] 刘泽庆. 关于 Altman 型映象的公共不动点定理[J]. 辽宁师范大学学报(自然科学版),1993,16(1):1.

[9] 张树义. Altman 型映象的公共不动点定理[J]. 烟台师范学院学报(自然科学版),2000,16(2):95.

[10] 谷峰,邓波. 关于 Altman 型映象的公共不动点定理[J]. 哈尔滨师范大学学报(自然科学版),2001,17(5):44.

[11] 赵美娜,张树义,郑晓迪. Ciric-Altman 型映射的不动点定理[J]. 西华大学学报(自然科学版),2016,35(6):79.

[12] 丛培根,张芯语,张树义. 概率度量空间中一类平方型映象的公共不动点定理与泛函方程组解的存在性[J]. 轻工学报,2018,33(4): 101.

[13] 张树义,赵美娜,丛培根. 模糊度量空间中 压缩型映象不动点定理及应用[J]. 南通大学学报(自然科学版),2017,16(3): 66.

[14] 万美玲,张树义,郑晓迪. 2 - 距离空间中非唯一不动点定理[J]. 轻工学报,2017,32(4): 105.

[15] 丛培根,聂辉,张树义. 具有 n 元点组的非线性压缩映象的不动点定理[J]. 北华大学学报(自然科学版),2018,19(4): 436.