轻工学报® 2020 年 11 月 第 35 卷 第 6 期
JOURNAL OF LIGHT INDUSTRY Vol. 35 No. 6 Nov. 2020

引用格式:金爱云. 分数阶单摆多混沌系统的降阶同步[J]. 轻工学报,2020,35(6):100 - 104.

中图分类号:O482.4 **文献标识码**:A

DOI:10.12187/2020.06.012

文章编号:2096 - 1553(2020)06 - 0100 - 05

分数阶单摆多混沌系统的降阶同步

Reduced-order synchronization of fractional-order simple pendulum multi-chaotic system

金爱云
JIN Aiyun

郑州航空工业管理学院 数学学院,河南 郑州 450015
College of Mathematics, *Zhengzhou University of Aeronautics*, *Zhengzhou* 450015, *China*

关键词:
分数阶单摆; 多混沌系统;降阶同步

Key words:
fractional-order simple pendulum;
multi-chaotic system;
reduced-order synchronization

摘要:通过对建立的单摆微分系统进行降阶处理,获得了单摆多混沌系统降阶同步的充分条件,研究表明,在合适的控制器下分数阶单摆多混沌系统是降阶同步的,数值仿真结果进一步验证了该降阶方法的有效性.

收稿日期:2019 - 09 - 01; **修回日期**:2020 - 03 - 22

基金项目:国家自然科学青年基金项目(11501525)

作者简介:金爱云(1978—),女, 河北省衡水市人,郑州航空工业管理学院讲师, 主要研究方向为复杂网络与混沌同步.

Abstract:By reducing the order of the established simple pendulum differential system, the sufficient conditions for the reduced-order synchronization of the single pendulum multi-chaotic system were obtained. The study proved that the fractional-order single pendulum multi-chaotic system was reduced-order synchronization under the appropriate controller. The value simulation results further verified the validity of this reduced-order method.

0 引言

混沌同步自 1960 年代被提出以来就备受关注,并已取得丰硕的研究成果,如反演滑模同步、积分滑模同步、反步滑模同步、终端滑模同步、比例积分滑模同步、有限时间同步、非线性系统同步、模糊系统同步等[1-10]. 伴随着分数阶微积分的发展和系统建模的需要,分数阶系统的同步问题受到了广泛关注. 文献[11]研究了具有不确定参数的驱动响应系统有限时间结构辨识与混沌同步,获得了同步时间的大小估计和系统参数辨识;文献[12]利用滑模方法研究了分数阶 Duffling-Van der pol 混沌系统的同步问题,给出了控制器的选取方法和适应律的设计方案; 文献[13]基于转移函数滑模方法研究了一类混沌系统的同步问题,给出了滑模面的选取方法和控制器的设计方案; 文献[14-15]研究了一类分数阶 Genesio-Tesi 系统的滑模同步,得到分数阶 Genesio-Tesi 混沌系统取得滑模同步的充分性结论. 而单摆混沌系统作为一类常见的物理系统,也引起了众多学者的高度关注. 文献[16]研究了单摆系统的动力学分析和混沌运动,给出了单摆系统的混沌分析与动力学解析;文献[17]研究了单摆保守系统中的复杂结构,文献[18]研究了单摆系统多参数混沌边缘,得到了单摆产生混沌的条件;文献[19]研究了分数阶单摆系统的滑模同步,得到单摆主从系统取得滑模同步的充分条件. 然而,关于单摆多混沌方面的研究成果还鲜有报道. 鉴于此,本文拟对分数阶和整数阶两个单摆组成的多混沌系统的降阶同步问题进行研究,将四阶分数阶单摆多混沌系统转化为一阶系统,给出主、从系统取得混沌同步的相关研究结果,以期为单摆混沌系统的同步控制研究提供思路和解决问题的方法.

1 基础知识

定义 1[20] Caputo 分数阶导数定义为

$$ {}_cD^{\alpha}_{t_0,t} = D^{-(n-\alpha)}_{t_0,t}\frac{d^n}{dt^n}x(t) = $$

$$ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{t_0}^{t}(t-\tau)^{n-\alpha-1}x^{(n)}(\tau)d\tau $$

$$ n-1<\alpha<n\in Z^{+} $$

2 主要结果

分数阶单摆混沌系统方程如下:

$$ \begin{cases} D_t^{\alpha}x_1 = x_2 \\ D_t^{\alpha}x_2 = -\gamma x_2 - gl^{-1}\sin x_1 \end{cases} $$

其中,D_t^{α} 表示 α 阶微分,$0<\alpha<1$;γ 为阻尼系数;g 为重力加速度;l 为摆长.

以分数阶两个单摆组成的多混沌系统作为主系统,即

$$ \begin{cases} D_t^{\alpha}x_1 = x_2 \\ D_t^{\alpha}x_2 = -\gamma_1 x_2 - gl_1^{-1}\sin x_1 \\ D_t^{\alpha}x_3 = x_4 \\ D_t^{\alpha}x_4 = -\gamma_2 x_4 - gl_2^{-1}\sin x_3 \end{cases} \tag{①} $$

设计从系统为

$$ \begin{cases} D_t^{\alpha}y_1 = y_2 \\ D_t^{\alpha}y_2 = -\gamma_1 y_2 - gl_1^{-1}\sin y_1 + u_1 \\ D_t^{\alpha}y_3 = y_4 \\ D_t^{\alpha}y_4 = -\gamma_2 y_4 - gl_2^{-1}\sin y_3 + u_2 \end{cases} \tag{②} $$

其中, 耦合函数 $y=[y_1,y_2,y_3,y_4]^{T}$,u_i 为控

制器.

定义系统误差 $e_i(t) = y_i - x_i$,得到误差系统为

$$\begin{cases} D_t^\alpha e_1 = e_2 \\ D_t^\alpha e_2 = -\gamma_1 e_2 - gl_1^{-1}\sin y_1 + gl_1^{-1}\sin x_1 + u_1 \\ D_t^\alpha e_3 = e_4 \\ D_t^\alpha e_4 = -\gamma_2 e_4 - gl_2^{-1}\sin y_3 + gl_2^{-1}\sin x_3 + u_2 \end{cases} \quad ③$$

因为 $D_t^\alpha z_1 = D_t^\alpha(e_1 + e_3) = -(e_1 + e_3) + (e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$,令 $z_1 = e_1 + e_3$,$z_2 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$,则上述系统 ③ 可转化为二阶系统

$$\begin{cases} D_t^\alpha z_1 = -z_1 + z_2 \\ D_t^\alpha z_2 = (e_2 - \gamma_1 e_2 - gl_1^{-1}\sin y_1 + gl_1^{-1}\sin x_1 + \\ \quad u_1) + (e_4 - \gamma_2 e_4 - gl_2^{-1}\sin y_3 + \\ \quad gl_2^{-1}\sin x_3 + u_2) \end{cases} \quad ④$$

令 $w = z_1 + z_2$,则系统 ④ 可进一步降阶为如下一阶系统:

$$\begin{aligned} D_t^\alpha w &= D_t^q(z_1 + z_2) = -z_1 + z_2 + \\ &(e_2 - \gamma_1 e_2 + gl_1^{-1}\sin y_1 + gl_1^{-1}\sin x_1 + u_1) + \\ &(e_4 - \gamma_2 e_4 - gl_2^{-1}\sin y_3 + gl_2^{-1}\sin x_3 + u_2) = \\ &-(z_1 + z_2) + 2z_2 + \\ &(e_2 - \gamma_1 e_2 - gl_1^{-1}\sin y_1 + gl_1^{-1}\sin x_1 + u_1) + \\ &(e_4 - \gamma_2 e_4 - gl_2^{-1}\sin y_3 + gl_2^{-1}\sin x_3 + u_2) \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} D_t^\alpha w &= -w + 2(e_1 + e_3) + 3(e_2 + e_4) + \\ &(-\gamma_1 e_2 - gl_1^{-1}\sin y_1 + gl_1^{-1}\sin x_1 + u_1) + \\ &(-\gamma_2 e_4 - gl_2{}^{-1}\sin y_3 + gl_2{}^{-1}\sin x_3 + u_2) \end{aligned} \quad ⑤$$

引理 1　对于系统③,如果满足 $\lim\limits_{t\to\infty}(e_1 + e_3) = 0$,则 $\lim\limits_{t\to\infty} e_1 = \lim\limits_{t\to\infty} e_2 = \lim\limits_{t\to\infty} e_3 = \lim\limits_{t\to\infty} e_4 = 0$ 成立.

证明　因为 $\lim\limits_{t\to\infty}(e_1 + e_3) = 0$,则 $\lim\limits_{t\to\infty} e_1 = 0$,进而 $\lim\limits_{t\to\infty} e_3 = 0$. 又因为 $\lim\limits_{t\to\infty} D_t^q(e_1 + e_3) = 0$,即 $\lim\limits_{t\to\infty}(e_2 + e_4) = 0$,所以 $\lim\limits_{t\to\infty} e_2 = 0$,从而得到 $\lim\limits_{t\to\infty} e_4 = 0$.

引理 2　对于系统④,如果满足 $\lim\limits_{t\to\infty}(z_1 + z_2) = 0$,则 $\lim\limits_{t\to\infty} z_1 = \lim\limits_{t\to\infty} z_2 = 0$ 成立.

证明　如果 $\lim\limits_{t\to\infty}(z_1 + z_2) = 0$,则可得 $\lim\limits_{t\to\infty} z_1 = -\lim\limits_{t\to\infty} z_2 = 0$,从而 $D_t^q z_1 = -z_1 + z_2$ 等价于 $D_t^q z_1 = -2z_1$,因而有 $\lim\limits_{t\to\infty} z_1 = \lim\limits_{t\to\infty} z_2 = 0$.

定理 1　如果满足

$$u_1(t) = -2e_1 - 3e_2 + \gamma_1 e_2 + gl_1^{-1}\sin y_1 - gl_1^{-1}\sin x_1$$

$$u_2(t) = -2e_3 - 3e_4 + \gamma_2 e_4 + gl_2^{-1}\sin y_3 - gl_2^{-1}\sin x_3$$

则系统 ① 与 ② 是混沌同步的.

证明　构造 Lyapunov 函数 $V(t) = \frac{1}{2}w^2$,对该函数求分数阶导数,得到

$$\begin{aligned} &D_t^q V(t) \leqslant w D_t^q w \leqslant \\ &w[-w + 2(e_1 + e_3) + 3(e_2 + e_4) + \\ &(-\gamma_1 e_2 - gl_1^{-1}\sin y_1 + gl_1^{-1}\sin x_1 + u_1) + \\ &(-\gamma_2 e_4 - gl_2^{-1}\sin y_3 + gl_2^{-1}\sin x_3 + u_2)] \leqslant \\ &-w^2 < 0 \end{aligned}$$

由引理 2 可知,$\lim\limits_{t\to\infty} w = 0$,所以 $\lim\limits_{t\to\infty} z_1 = \lim\limits_{t\to\infty} z_2 = 0$,根据引理 1,从而得到 $\lim\limits_{t\to\infty} e_1 = \lim\limits_{t\to\infty} e_2 = \lim\limits_{t\to\infty} e_3 = \lim\limits_{t\to\infty} e_4 = 0$,证毕.

以由整数阶两个单摆组成的多混沌系统作为主系统,即

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\gamma_1 x_2 - gl_1^{-1}\sin x_1 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -\gamma_2 x_4 - gl_2^{-1}\sin x_3 \end{cases} \quad ⑥$$

设计从系统为

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -\gamma_1 y_2 - gl_1^{-1}\sin y_1 + u_1 \\ \dot{y}_3 = y_4 \\ \dot{y}_4 = -\gamma_2 y_4 - gl_2^{-1}\sin y_3 + u_2 \end{cases} \quad ⑦$$

定义系统误差 $e_i(t) = y_i - x_i$,得到误差系统

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 \\ \dot{e}_2 = -\gamma_1 y_2 + \gamma_1 x_2 - gl_1^{-1}\sin y_1 + gl_1^{-1}\sin x_1 + u_1 \\ \dot{e}_3 = e_4 \\ \dot{e}_4 = -\gamma_2 x_4 + \gamma_2 x_4 - gl_2^{-1}\sin y_3 + gl_2^{-1}\sin x_3 + u_2 \end{cases} \quad ⑧$$

因为 $\dot{z}_1 = (\dot{e}_1 + \dot{e}_3) = -(e_1 + e_3) + (e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$,令 $z_1 = e_1 + e_3$,$z_2 = e_1 + e_2 + e_3 +$

e_4,上述系统⑧可转化为二阶系统

$$\begin{cases}\dot{z}_1 = -z_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 = (e_2 - \gamma_1 e_2 - gl_1^{-1}\sin y_1 + gl_1^{-1}\sin x_1 + \\ \quad u_1) + (e_4 - \gamma_2 e_4 - gl_2^{-1}\sin y_3 + \\ \quad gl_2^{-1}\sin x_3 + u_2)\end{cases} \tag{9}$$

令 $w = z_1 + z_2$,则系统⑨可进一步降阶为如下一阶系统:

$$\begin{aligned}\dot{w} = (\dot{z}_1 + \dot{z}_2) = -z_1 + z_2 + \\ (e_2 - \hat{\gamma}_1 y_2 + \gamma_2 x_2 - gl_1^{-1}\sin y_1 + gl_1^{-1}\sin x_1 + u_1) + \\ (e_4 - \gamma_2 e_4 - gl_2^{-1}\sin y_3 + gl_2^{-1}\sin x_3 + u_2) = \\ -w + 2(e_1 + e_3) + 3(e_2 + e_4) + \\ (-\gamma_1 e_2 - gl_1^{-1}\sin y_1 + gl_1^{-1}\sin x_1 + u_1) + \\ (-\gamma_2 e_4 - gl_2^{-1}\sin y_3 + gl_2^{-1}\sin x_3 + u_2) = \\ -(z_1 + z_2) + 2z_2 + \\ (e_2 - \gamma_1 e_2 - gl_1^{-1}\sin y_1 + gl_1^{-1}\sin x_1 + u_1) + \\ (e_4 - \gamma_2 e_4 - gl_2^{-1}\sin y_3 + gl_2^{-1}\sin x_3 + u_2)\end{aligned}$$

定理2 如果满足

$$u_1(t) = -2e_1 - 3e_2 + \gamma_1 e_2 + gl_1^{-1}\sin y_1 - gl_1^{-1}\sin x_1$$

$$u_2(t) = -2e_3 - 3e_4 + \gamma_2 e_4 + gl_2^{-1}\sin y_3 - gl_2^{-1}\sin x_3$$

则系统⑥与⑦是混沌同步的.

证明 与定理1类似,此处不再详细证明.

3 数值仿真

以由两个分数阶单摆组成的多混沌系统为例,利用预估校正方法进行数值仿真.

参考文献[19],选取系统参数为:$g = 9.8$,$l_1 = 1.2$,$l_2 = 1.25$,$\gamma_1 = 0.76$,$\gamma_2 = 0.84$,$\alpha = 0.86$;系统初始值设置为:$x_1(0) = 0.5$,$x_2(0) = 1$,$x_3(0) = -1$,$x_4(0) = -1.2$,$y_1(0) = 1.5$,$y_2(0) = 1.2$,$y_3(0) = -2.1$,$y_4(0) = 1.5$;选取控制器为:$u_1(t) = -2e_1 - 3e_2 + \gamma_1 e_2 + gl_1^{-1}\sin y_1 - gl_1^{-1}\sin x_1$,$u_2(t) = -2e_3 - 3e_4 + \gamma_2 e_4 + gl_2^{-1}\sin y_3 - gl_2^{-1}\sin x_3$,所得多混沌系统误差仿真曲线如图1所示.从图1可以看出,系统

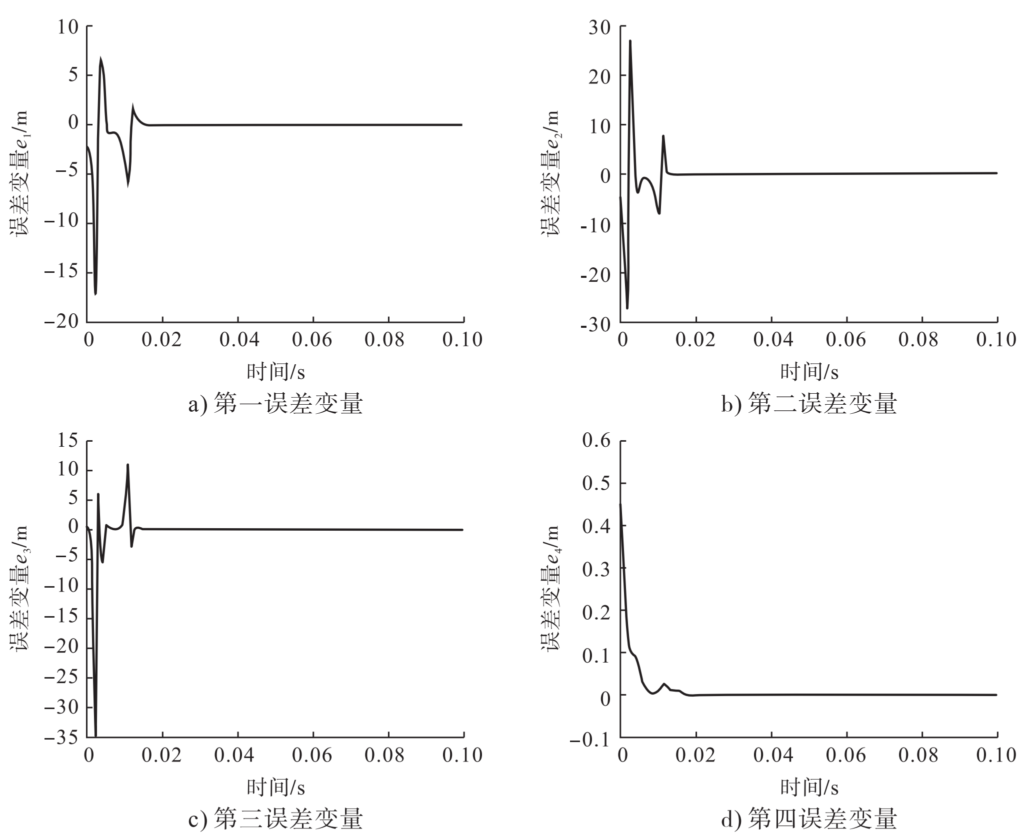

图1 多混沌系统误差仿真曲线

Fig.1 Error simulation curve of multi-chaotic systems

误差开始时刻相差较大,距坐标原点较远,随着时间的延长,误差逐渐趋于一致,趋近于原点,这表明单摆多混沌系统的驱动-响应系统实现了混沌同步.

4 结论

本文将分数阶单摆多混沌系统降阶转化为一阶系统,研究了分数阶单摆多混沌系统并把研究结果推广到整数阶,给出了单摆混沌主从系统实现同步的充分条件,数值仿真结果进一步证明了该降阶方法的有效性. 该方法适用于非线性多混沌系统,可用于研究常见混沌系统的同步问题.

参考文献:

[1] 宋晓娜,宋帅,满景涛. 不确定分数阶 Genesio 混沌系统的反演滑模同步[J]. 山东科技大学学报(自然科学版),2019,38(5):66.

[2] 毛北行. 纠缠混沌系统的比例积分滑模同步[J]. 山东大学学报(工学版),2018,48(4):50.

[3] SONG X N, SONG S, MAN J T. Backstepping sliding mode synchronization of uncertain fractional-order Genesio chaotic system[J]. Journal of Shandong University of Science and Technology(Natural Science), 2019,38(5):66.

[4] 毛北行,周长芹. 分数阶不确定 Duffling 混沌系统的终端滑模同步[J]. 东北师范大学学报(自然科学版),2018,50(2):47.

[5] 王东晓. 分数阶超混沌 Bao 系统的比例积分滑模同步[J]. 内蒙古农业大学学报(自然科学版),2018,39(3):83.

[6] 毛北行,孟晓玲. 具有死区输入的分数阶多涡卷混沌系统的有限时间同步[J]. 浙江大学学报(理学版),2017,44(3):302.

[7] SARA H, HEYDAR T S. Design of nonlinear conformable fractional-order sliding mode controller for a class of nonlinear systems[J]. Journal of Control, Automation and Electrical Systems,2019,35(3):313.

[8] SONG S, ZHANG B Y, SONG X N, et al. Fractional-order adaptive neuro-fuzzy sliding mode H_∞ control for fuzzy singularly perturbed systems[J]. Journal of Franklin Institute, 2019,356(10): 5027.

[9] 毛北行. 分数阶 Newton-Leipnik 混沌系统滑模同步的两种方法[J]. 吉林大学学报(理学版),2018,56(3):708.

[10] MAO B X. Four methods for sliding mode synchronization of fractional-order new hyperchaotic system[J]. Paper Asia,2018,13(5):118.

[11] MEI J, JIANG M H, WANG J. Finite-time structure identification and synchronization of drive-response systems with uncertain parameter[J]. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat,2013(18):999.

[12] 毛北行,李巧利. 一类分数阶 Duffling-Van der pol 系统的混沌同步[J]. 吉林大学学报(理学版),2016,54(2):369.

[13] YU J Y, LEI J W. Synchronization of chaotic system with adaptive transfer function sliding mode method[J]. Optic,2017,132:209.

[14] LU J G. Chaotic dynamics and cynchronization of fractional-order Genesio-Tesi systems[J]. Chinese Physics,2005,14(8):1517.

[15] 毛北行,李巧利. 一类分数阶 Genesio-Tesi 系统的滑模混沌同步[J]. 中山大学学报(自然科学版),2017,56(2):76.

[16] 郎和. 保守单摆系统中的混沌运动[J]. 西北师范大学学报(自然科学版),2002,38(4):108.

(下转第 108 页)

$A)(A \oplus B) = 0.$

2 结语

本文利用共轭转置矩阵和参考文献[1]的方法证明了适用于 $A^* = -A^3$ 的矩阵 A 可以对角化及属于 A 的不同特征值的特征向量正交；得到了该矩阵的可能特征值的具体值；给出了公式 $(A \otimes B)^* = (A \otimes B)^3$ 和 $(A \oplus B)^* = -(A \oplus B)^3$ 成立的充要条件，以及这种矩阵的奇异值分解式. 该研究结果在判定矩阵的稳定性、线性矩阵方程求解、大型矩阵的简约表示及图像压缩中都具有潜在的应用价值.

参考文献：

[1] 秦建国，谢栋梁，王静娜. 一类可以对角化的矩阵[J]. 郑州轻工业学院学报（自然科学版），2013，28(2)：106.

[2] 陈公宁，秦建国. 完全不确定 Hamburger 矩阵矩量问题的有限阶解[J]. 数学物理学报，2010，30(3)：577.

[3] 秦建国，陈公宁，何红亚. Cauchy 矩阵及其相关的插值问题[J]. 数学的实践与认识，2006，36(9)：233.

[4] HU Y J，CHEN G N. On rank variation of block matrices generated by Nevanlinna matrix function[J]. Mathematische Nachrichten，2009，282(4)：611.

[5] 马明玥，付志慧. Hermitian 随机矩阵特征值[J]. 吉林大学学报（理学版），2016，54(3)：513.

[6] 陈公宁. 矩阵理论与应用[M]. 北京：科学出版社，2007.

[7] MENDOZA A，LÁAZARO R，VARELA A. Supports for minimal hermitian matrices[J]. Linear Algebra and its Applications，2019，584：458.

[8] 于寅. 高等工程数学[M]. 武汉：华中科技大学出版社，2007.

（上接第 104 页）

[17] 郎和. 保守单摆系统中的复杂结构[J]. 西北师范大学学报（自然科学版），2003，39(2)：33.

[18] 贺尚宏，谢进，程杰锋，等. 非线性单摆动力系统多参数混沌边缘的研究[J]. 机械传动，2015，39(8)：1.

[19] 程春蕊，朱军辉，毛北行. 分数阶单摆系统的终端滑模混沌同步[J]. 工程数学学报，2019，36(1)：99.

[20] 胡建兵，赵灵冬. 分数阶系统稳定性理论与控制研究[J]. 物理学报，2013，62(24)：5041.