轻工学报® 2021 年 6 月 第 36 卷 第 3 期
JOURNAL OF LIGHT INDUSTRY Vol. 36 No. 3 Jun. 2021

宫玉荣,刘慧娟.《一类可以对角化的矩阵》一文的进一步研究结果[J]. 轻工学报,2021,36(3):104 – 108.
GONG Y R, LIU H J. Further results on article of a class of matrices that can be diagonalized[J]. Journal of Light Industry,2021,36(3):104 – 108. DOI:10.12187/2021.03.013
中图分类号:O151.21 文献标识码:A 文章编号:2096 – 1553(2021)03 – 0104 – 05

《一类可以对角化的矩阵》一文的进一步研究结果

Further results on article of *a class of matrices that can be diagonalized*

宫玉荣,刘慧娟
GONG Yurong, LIU Huijuan

郑州商学院 通识教育中心,河南 巩义 451200
General Education Center, Zhengzhou Business University, Gongyi 451200, *China*

关键词:
共轭转置矩阵;矩阵对角化;奇异值分解;张量积

Key words:
conjugate transpose matrix; diagonalization of matrix; singular value decomposition; tensor product

摘要:利用矩阵特征值与其行列式的关系及矩阵的奇异值、张量积、张量和等概念和理论,用另一种方法证明了文献[1]的定理 2,研究了适合条件 $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^2$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值分解式及行列式,给出了适于这一条件的两个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的张量积也满足条件 $(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})^* = (\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})^2$ 的一些基本结果,以及 $\boldsymbol{A}^*$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的特征值、特征向量之间的关系、矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的谱分解式等.

收稿日期:2020 – 06 – 19;**修回日期:**2021 – 01 – 15
基金项目:国家自然科学基金项目(11801529)
作者简介:宫玉荣(1981—),男,山东省莱阳市人,郑州商学院副教授,主要研究方向为矩阵理论、经济统计.

Abstract: By utilizing the concepts and theories of singular value, tensor product, tensor sum and the connection of eigenvalue with determinant of matrices, another proof on theorem 2 in literature [1] was given, the singular value and spectral decomposition and the determinant of the matrix suited to $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^2$ were investigated, the conclusions were also obtained: $(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})^*=(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})^2$ on tensor product about two matrices $\boldsymbol{A}$ and $\boldsymbol{B}$ which satisfied the above condition, the relationship of eigenvalues of $\boldsymbol{A}^*$ with $\boldsymbol{A}$, the relationship between eigenvectors, and spectral decomposition formular of the matrice $\boldsymbol{A}$.

0 引言

在不同情形下,人们会用到不同结构的矩阵, 其中,Hermite 矩阵就是一种结构特殊而应用广泛的矩阵. 受 Hermite 矩阵的启发,文献[1-2]分别对适合条件 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^2$ 和 $\boldsymbol{A}^*=-\boldsymbol{A}^3$ 的矩阵进行了研究,证明了这两类矩阵都是正规矩阵,给出了它们的谱及一些性质. 伴随着研究的深入,又获得了对这两类矩阵的一些新认识和进一步结果. 本文拟在文献[1]的基础上,对适合条件 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^2$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的性质进行深入挖掘,对矩阵的奇异值、行列式、张量积、张量和等进行研究,进一步获得它的奇异值分解式、行列式表示,给出适合此条件的两个矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的张量积,也适合 $(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})^*=(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})^2$ 的基本结果和 $(\boldsymbol{A}\oplus\boldsymbol{B})^*=(\boldsymbol{A}\oplus\boldsymbol{B})^2$ 的条件,以期丰富正规矩阵的内容. 伴随着对适合条件 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^2$ 矩阵性质的进一步研究及与应用相联系,关于这种矩阵的结果有望像 Hermite 矩阵一样用于一些理论研究和实际应用之中[3-7].

1 基本结果

定理 1 设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{C}^{n\times n}$, $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^2$, $r(\boldsymbol{A})=r\leqslant n$,则有如下结论成立:

1) $\sigma(\boldsymbol{A})\subseteq\left\{0,1,-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$.

2) $\boldsymbol{A}$ 有奇异值分解

$$\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}=\begin{bmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

其中,$\boldsymbol{E}_r$ 是 r 阶单位矩阵;$\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}$ 是 n 阶酉矩阵.

3) 假定 $\boldsymbol{A}$ 具有全部 4 个特征值,$\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\lambda_4=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$. 属于第一个特征值 $\lambda_1=0$ 的全部单位正交的列特征向量 $x_1,x_2,\cdots,x_p$ 构成矩阵 $\boldsymbol{G}_1=x_1x_1^*+x_2x_2^*+\cdots+x_px_p^*=\sum_{i=1}^{p}x_ix_i^*$, $\boldsymbol{G}_2,\boldsymbol{G}_3,\boldsymbol{G}_4$ 分别是由 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 $\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ 的单位正交的列特征向量按照上述 $\boldsymbol{G}_1$ 的构成而获得的矩阵. 则 $\boldsymbol{A}$ 有如下谱分解:

$$\boldsymbol{A}=\lambda_1\boldsymbol{G}_1+\lambda_2\boldsymbol{G}_2+\lambda_3\boldsymbol{G}_3+\lambda_4\boldsymbol{G}_4$$

这里 $\boldsymbol{G}_i\boldsymbol{G}_j=\delta_{i,j}\boldsymbol{G}_i$, $i,j=1,2,3,4$.

4) $|\boldsymbol{A}|=0^a\cdot1^b\cdot\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^c\cdot\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^d=$

$$\begin{cases}0 & a\neq0\\ \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^c & a=d=0\\ \left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^d & a=c=0\\ \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{c-d} & a=0,c>d\\ \left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{d-c} & a=0,d>c\end{cases}$$

证明:1) 由于 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^2$,所以 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}^*)^2$. 设 $\lambda_0=a+bi\in\sigma(\boldsymbol{A})$, $a,b\in R$,则存在 $\alpha\in C^n$, $\alpha\neq0$,使得 $\boldsymbol{A}\alpha=\lambda_0\alpha$,于是 $\lambda_0\alpha=\boldsymbol{A}\alpha=(\boldsymbol{A}^*)^2\alpha=\boldsymbol{A}^4\alpha=\lambda_0^4\alpha$,所以 $\lambda_0^4=\lambda_0$. 易得

$$\lambda=0,1,-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

即 $\sigma(\boldsymbol{A})\subseteq\left\{0,1,-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$.

2)由文献[1]可知,$\boldsymbol{A}$ 为正规矩阵,故存在 n 阶酉矩阵 $\boldsymbol{W}$,使 $\boldsymbol{W}^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{W}$ 为对角阵,其中主对角线上的元素为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 又 $1,-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$,$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 是 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\lambda_0^3=1$ 的特征值,记 $r(\boldsymbol{A})=r$,故有 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{W}diag\{1,\cdots,1,0,\cdots,0\}\boldsymbol{W}^*$,其中对角矩阵主对角线上 1 的个数为 r 个,此式表明 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}$ 仅以 1 作为正特征值,根据矩阵 $\boldsymbol{A}$ 奇异值分解及 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}$ 特征值分解的关系[8],可知 $\boldsymbol{A}$ 有 r 个正奇异值 1. 于是,存在 n 阶酉矩阵 $\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}$,使得

$$\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}=\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}=\begin{bmatrix}\Sigma_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

其中 $\Sigma_r=E_r$ 是一般矩阵奇异值分解所不具备的.

矩阵奇异值分解在线性系统理论、最小二乘问题、广义逆矩阵、试验数据处理等方面具有重要应用. 若令 $\boldsymbol{U}=[U_{n,r}\quad U_{n,n-r}]$,$\boldsymbol{V}^*=\begin{bmatrix}V_{n,r}^*\\ V_{n,n-r}^*\end{bmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\begin{bmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{V}^*=\boldsymbol{U}_{n,r}\boldsymbol{V}_{n,r}^*$.

这种矩阵分解的紧凑形式,在线性多变量控制系统中有重要应用[9].

3)由于 $\boldsymbol{A}$ 是正规矩阵,$\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征向量正交[10]. 现分别将 $\boldsymbol{A}$ 的属于同一特征值的列特征向量进行正交化和单位化,比如,记 λ_2 单位正交的列特征向量是 $x_{21},x_{22}\cdots$,x_{2p_2},其他特征值单位正交的列特征向量仿此方法作出和标记,再将所有这些单位正交的特征向量合并在一起,记为 $x_{11},\cdots,x_{1p_1},x_{21},\cdots,x_{2p_2}$,$x_{31},\cdots,x_{3p_3},x_{41}\cdots,x_{4p_4}$.

由此得到下面的 n 阶酉矩阵

$$\boldsymbol{U}=[x_{11},\cdots,x_{1p_1},x_{21},\cdots,x_{2p_2},x_{31},\cdots,x_{3p_3},x_{41},\cdots,x_{4p_4}]$$

这时有

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}diag[\lambda_1,\cdots,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_2,\lambda_3,\cdots,\lambda_3,\lambda_4,\cdots,\lambda_4]\boldsymbol{U}^*$$

所以

$$\boldsymbol{A}=\lambda_1\boldsymbol{G}_1+\lambda_2\boldsymbol{G}_2+\lambda_3\boldsymbol{G}_3+\lambda_4\boldsymbol{G}_4$$

下面验证 $\boldsymbol{G}_i\boldsymbol{G}_j=\delta_{ij}\boldsymbol{G}_i$,$i,j=1,2,3,4$. 这里仅验证 $i=j=1$ 时,$\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{G}_1=\delta_{11}\boldsymbol{G}_1=\boldsymbol{G}_1$,其余情况可类似证明.

$$\begin{gathered}\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{G}_1=\\ (x_{11}x_{11}^*+\cdots+x_{1p_1}x_{1p_1}^*)(x_{11}x_{11}^*+\cdots+x_{1p_1}x_{1p_1}^*)=\\ x_{11}x_{11}^*(x_{11}x_{11}^*+\cdots+x_{1p_1}x_{1p_1}^*)+\\ x_{12}x_{12}^*(x_{11}x_{11}^*+\cdots+x_{1p_1}x_{1p_1}^*)+\cdots+\\ x_{1p_1}x_{1p_1}^*(x_{11}x_{11}^*+\cdots+x_{1p_1}x_{1p_1}^*)=\\ x_{11}x_{11}^*+\cdots+x_{1p_1}x_{1p_1}^*=\boldsymbol{G}_1\end{gathered}$$

4)依据矩阵行列式等于其特征值之积的结论便可得此结果.

定理 2　设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{C}^{n\times n}$,且 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^2$,则

1)$\lambda_0\in\sigma(A)\Leftrightarrow\bar{\lambda}_0\in\sigma(\boldsymbol{A}^*)$.

2)设 $0\neq\alpha\in C^n$,α 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量$\Leftrightarrow\alpha$ 是 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征向量.

证明:1)对于任意矩阵 $\boldsymbol{A}$,由于 $|\lambda_0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda_0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=\overline{\overline{|\lambda_0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|}}=|\overline{\bar{\lambda}_0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^*}|$,且 $|\lambda_0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0\Leftrightarrow|\bar{\lambda}_0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^*|=0$,所以 $\lambda_0\in\sigma(\boldsymbol{A})\Leftrightarrow\bar{\lambda}_0\in\sigma(\boldsymbol{A}^*)$.

2)设 $0\neq\alpha\in C^n$,满足 $\boldsymbol{A}\alpha=\lambda_0\alpha$,再由 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^2$ 可得 $\boldsymbol{A}^*\alpha=\boldsymbol{A}^2\alpha=\boldsymbol{A}(\lambda_0\alpha)=\lambda_0\boldsymbol{A}\alpha=\lambda_0^2\alpha$,上式表明 α 是 $\boldsymbol{A}^*$ 属于特征值 λ_0^2 的特征向量;再设 $0\neq\alpha\in C^n$,满足 $\boldsymbol{A}^*\alpha=\mu\alpha$,由于 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^2$,所以 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}^*)^2$,可得 $\boldsymbol{A}\alpha=(\boldsymbol{A}^*)^2\alpha=\boldsymbol{A}^*(\mu\alpha)=\mu\boldsymbol{A}^*\alpha=\mu^2\alpha$,即 α 是 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 μ^2 的特征向量.

定理 3　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{C}^{n\times n}$ 且 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^2$,$\boldsymbol{B}^*=$

B^2,则

1) $(A\otimes B)^* = (A\otimes B)^2$.

2) 若 $AB = BA$,则 $(AB)^* = (AB)^2$.

3) 若 $|A| \neq 0$,则 $(A^{-1})^* = (A^{-1})^2$.

4) 若 A,B 分别相似于 A_1,B_1,即有非退化矩阵 P,Q,使得 $A = PA_1P^{-1}, B = QB_1Q^{-1}$,则有 $(A\otimes B)^* = (P\otimes Q)(A_1\otimes B_1)^2(P\otimes Q)^{-1}$.

证明:1) 由本定理条件可知,

$$(A\otimes B)^* = A^*\otimes B^* = A^2\otimes B^2 = (A\otimes B)(A\otimes B) = (A\otimes B)^2$$

2) 因为 $AB = BA$,所以

$$(AB)^* = B^*A^* = B^2A^2 = B(BA)A = BABA = ABAB = (AB)^2$$

3) 因为 $|A| \neq 0$,所以 A^{-1} 存在,故可得

$$(AA^{-1})^* = E^* = E = (A^{-1})^*A^*$$

所以 $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1} = (A^2)^{-1} = A^{-1}A^{-1} = (A^{-1})^2$.

4) 由本定理的结论 1) 可得

$$\begin{aligned}(A\otimes B)^* &= (A\otimes B)^2 = \\ &[PA_1P^{-1}\otimes QB_1Q^{-1}][PA_1P^{-1}\otimes QB_1Q^{-1}] = \\ &[(PA_1P^{-1})(PA_1P^{-1})]\otimes[(QB_1Q^{-1})(QB_1Q^{-1})] = \\ &PA_1^2P^{-1}\otimes QB_1^2Q^{-1} = \\ &(P\otimes Q)[A_1^2P^{-1}\otimes B_1^2Q^{-1}] = \\ &(P\otimes Q)(A_1^2\otimes B_1^2)(P^{-1}\otimes Q^{-1}) = \\ &(P\otimes Q)(A_1\otimes B_1)^2(P\otimes Q)^{-1}\end{aligned}$$

说明:i) 定理 3 中的结论 1) 对张量和未必成立. 因为,

$$\begin{aligned}(A\oplus B)^* &= [(E\otimes A) + (B\otimes E)]^* = \\ &(E\otimes A)^* + (B\otimes E)^* = \\ &(E\otimes A^*) + (B^*\otimes E) = \\ &(E\otimes A^2) + (B^2\otimes E) = A^2\oplus B^2\end{aligned}$$

而 $(A\oplus B)^2 = (A\oplus B)(A\oplus B) = A^2\oplus B^2 + 2B\otimes A$,只要 $A\neq 0, B\neq 0$,便有 $B\otimes A\neq 0$,即 $(A\oplus B)^* \neq (A\oplus B)^2$.

ii) 定理 3 表明,当矩阵 A,B 分别适合条件 $A^* = A^2, B^* = B^2$ 时,若令矩阵 C 分别等于 $A\otimes B, AB, A^{-1}$,则 C 也适合条件 $C^* = C^2$.

iii) 当 A,B 分别相似于 A_1,B_1 时,$(A\otimes B)^*$ 相似于 $(A_1\otimes B_1)^2$.

定理 4 设 $A,B\in C^{n\times n}$,且 $A^* = A^2, AB = BA$,则有 $(A^*)^nB = B(A^*)^n$.

证明:依题意,有

$$\begin{aligned}(A^*)^nB &= (A^2)^nB = A^{2n-1}(AB) = \\ &A^{2n-1}(BA) = A^{2n-2}(AB)A = \\ &A^{2n-2}(BA)A = \cdots = BA^{2n} = \\ &B(A^2)^n = B(A^*)^n\end{aligned}$$

2 结语

本文用另一种方法证明了文献[1]中的定理 2,给出了适合条件 $A^* = A^2$ 的矩阵 A 的进一步结果:得到了 A 的奇异值分解式及其紧凑形式和 A 的行列式,证明了适于这种关系的两个矩阵 A,B 的张量积仍满足 $(A\otimes B)^* = (A\otimes B)^2$,分析了张量和满足 $(A\oplus B)^* = (A\oplus B)^2$ 的条件,以及关于 A 与 A^* 的特征值、特征向量的一些结果. 至此,将适合条件 $A^* = A^2$ 的矩阵与一般矩阵和 Herrmite 矩阵进行比较发现,该矩阵的性质介于一般矩阵与 Hermite 矩阵的性质之间,即与一般矩阵相比,本文研究的矩阵是正规矩阵,且有一般矩阵所不具备的良好性质;但与 Hermite 矩阵相比,又稍显逊色,比如:它的特征值并非全是实数,这将限制它的应用范围. 本文的矩阵 A 还具备 Hermite 矩阵哪些良好性质,在雅普洛夫方程及其稳定性,以及解析函数插值等问题中,Hermite 矩阵可否换成本文的矩阵 A 等问题,还需作进一步研究.

参考文献:

[1] 秦建国,谢栋梁,王静娜. 一类可以对角化的

矩阵[J]. 郑州轻工业学院学报(自然科学版),2013,28(2):106.

[2] 刘慧娟,曲双红. 满足条件 $\boldsymbol{A}^* = -\boldsymbol{A}^3$ 的矩阵性质研究[J]. 轻工学报,2020,35(6):105.

[3] 生成玉,刘威,吕琳琳. Hermite 矩阵空间上保持幂等关系的映射[J]. 黑龙江大学学报(自然科学版),2017,34(3):259.

[4] SALEM A. On the discrete q-Hermite matrix polynomials[J]. International Journal of Applied and Computational Mathematics, 2017, 3(4): 3147.

[5] DEFEZ E, TUNG M M. A new type of Hermite matrix polynomial series [J]. Quaestions Mathematiae, 2018, 41(2): 205.

[6] 宋园. 正定 Hermite 矩阵迹的不等式的几点注记[J]. 安庆师范大学学报(自然科学版),2019,25(2):40.

[7] 冯艳昭,张澜. 两类矩阵方程的极小范数最小二乘三对角 Hermite 解[J]. 高等学校计算数学学报,2020,42(2):106.

[8] BOROS T, ROZSA P. An explicit formula for singular values of the Sylvester-Kac matrix [J]. Linear Algebra and its Applications, 2007, 421(2): 407.

[9] 于寅. 高等工程数学[M]. 武汉:华中科技大学出版社,2001.

[10] 陈公宁. 矩阵理论与应用[M]. 北京:科学出版社,2007.