轻工学报® 2018 年 1 月 第 33 卷 第 1 期
JOURNAL OF LIGHT INDUSTRY Vol. 33 No. 1 Jan. 2018

引用格式: 何国亮,马玉飞. Mikhailov-Shabat-Sokolov 方程的精确解[J]. 轻工学报,2018,33(1):104 - 108.

中图分类号: O175 **文献标识码:** A

DOI: 10.3969/j.issn.2096 - 1553.2018.1.013

文章编号: 2096 - 1553(2018)01 - 0104 - 05

Mikhailov-Shabat-Sokolov 方程的精确解

Exact solutions to the Mikhailov-Shabat-Sokolov equation

何国亮,马玉飞

HE Guoliang, MA Yufei

郑州轻工业学院 数学与信息科学学院,河南 郑州 450002

College of Mathematics and Information Science, Zhengzhou University of Light Industry, Zhengzhou 450002, China

关键词:
$\left(\frac{G'}{G}\right)$展开法;精确解;MSS 方程

Key words:
$\left(\frac{G'}{G}\right)$ expansion method; exact solution; MSS equation

摘要: 利用$\left(\frac{G'}{G}\right)$展开法求得了著名的 Mikhailov-Shabat-Sokolov(MSS) 方程的双曲函数解、三角函数解和有理函数解 3 种形式精确行波解;特别地,当参数取特殊值时,双曲函数解可以转化成孤立波解.

收稿日期: 2017 - 02 - 09

基金项目: 国家自然科学基金项目(11501526);郑州轻工业学院博士科研基金项目(2013BSJJ051)

作者简介: 何国亮(1983—),男,河南省郑州市人,郑州轻工业学院副教授,博士,主要研究方向为可积动力系统.

Abstract:The exact travelling wave solutions of the famous Mikhailov-Shabat-Sokolov (MSS) equation,which contained three kinds of forms,such as the solution of hyperbolic functions,the solution of trigonometric functions and the solution of rational functions,were obtained by using the $\left(\frac{G'}{G}\right)$ expansion method. Especially when the parameters were taken as special values,the solution of the hyperbolic functions could be transformed into the soliton wave solutions.

0 引言

对非线性发展方程解的研究是其广泛应用的基础,求解非线性发展方程的精确解一直是数学、物理等领域的一项重要研究课题. 在众多行之有效的方法中,M. L. Wang 等[1]提出的$\left(\frac{G'}{G}\right)$展开法是一种简单易行的寻找非线性演化方程精确行波解的方法. 该方法一经提出便引起了国内外的广泛关注,随后众多学者用该方法得到了许多 1 +1 维孤子方程的行波解,并将其推广到 2 +1 维等高维及耦合情形,对该方法进行扩展和发展,使其可以解决更多类型非线性发展方程的精确解求解问题[2-4].

在非线性方程中,耦合方程包含一大类重要的方程,比如耦合非线性 Schrodinger 方程、耦合 Sasa-Satsuma 方程等,这些方程在物理等领域都有重要应用. 而 Mikhailov-Shabat-Sokolov (MSS) 方程最初是由 Mikhailov, Shabat 和 Sokolov 在用对称方法研究可积方程的分类时提出的,目前只见到一些对该方程的代数几何解的研究[6]. 由于非线性发展方程(组)求解的困难,至今尚未看到普遍适用的求解非线性发展方程(组)的方法. 因此,不断发展原有的方法和继续寻找一些新的方法来得到精确解,仍是一项十分重要的研究工作. 鉴于此,本文拟利用$\left(\frac{G'}{G}\right)$展开法求得 MSS 方程的精确行波解,以期丰富该方程的解系,为其应用奠定基础.

1 $\left(\frac{G'}{G}\right)$展开法求 MSS 方程的精确解

采用$\left(\frac{G'}{G}\right)$展开法求解 MSS 方程[5]

$$p_t = p_{xx} - 2qq_x \qquad ①$$

$$q_t = -q_{xx} + 2pp_x \qquad ②$$

对上述方程作线性变换

$$u = p + q \qquad v = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})p + \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})q$$

可得如下耦合微分方程[6]

$$u_t = u_{xx} + 2uu_x - 2(uv)_x - 6v_{xx} \qquad ③$$

$$v_t = -v_{xx} + 2vv_x - 2(uv)_x - 2u_{xx} \qquad ④$$

这样,当求得了 MSS 方程的精确解之后,通过上述变换也可以得到方程③④的精确解.

假设行波变量为

$$p(x,t) = p(\xi) \qquad q(x,t) = q(\xi)$$

$$\xi = x - Vt$$

由此将方程①②变为关于 $p = p(\xi)$, $q = q(\xi)$ 的常微分方程

$$-Vp' - p'' + 2qq' = 0$$

$$-Vq' + qq'' - 2pp' = 0$$

将上式关于 ξ 积分一次,可得

$$C_1 - Vp - p' + q^2 = 0 \qquad ⑤$$

$$C_2 - Vq + q' - p^2 = 0 \qquad ⑥$$

其中 C_1, C_2 是两个待定积分常数.

假设常微分方程⑤⑥的解可以用关于$\left(\frac{G'}{G}\right)$的多项式表示为

$$p(\xi) = \sum_{i=-m}^{m} \alpha_i \left(\frac{G'}{G}\right)^i \qquad ⑦$$

$$q(\xi) = \sum_{j=-n}^{n} \beta_j \left(\frac{G'}{G}\right)^j \qquad ⑧$$

其中 $G = G(\xi)$ 满足二阶线性常微分方程

$$G''(\xi) + \lambda G'(\xi) + \mu G(\xi) = 0 \qquad ⑨$$

通过 ⑨ 可以得到

$$\left(\frac{G'}{G}\right)' = \frac{GG'' - (G')^2}{G^2} = -\mu - \lambda\left(\frac{G'}{G}\right) - \left(\frac{G'}{G}\right)^2 \quad ⑩$$

由 ⑦—⑩ 可得

$$\begin{cases} p' = -m\alpha_m\left(\frac{G'}{G}\right)^{m+1} + \cdots \\ p^2 = {\alpha_m}^2\left(\frac{G'}{G}\right)^{2m} + \cdots \\ q' = -n\beta_n\left(\frac{G'}{G}\right)^{n+1} + \cdots \\ q^2 = {\beta_n}^2\left(\frac{G'}{G}\right)^{2n} + \cdots \end{cases} \quad ⑪$$

基于 ⑪,考虑方程 ⑤ 中 p' 和 q^2 之间和方程 ⑥ 中 q' 和 p^2 之间的齐次平衡,需要 $m+1=2n$;$n+1=2m \Rightarrow n=1, m=1$,从而可以将 ⑦⑧ 写为

$$\begin{cases} p(\xi) = \alpha_1\left(\frac{G'}{G}\right) + \alpha_0 + \alpha_{-1}\left(\frac{G'}{G}\right)^{-1} & \alpha_1 \neq 0 \\ q(\xi) = \beta_1\left(\frac{G'}{G}\right) + \beta_0 + \beta_{-1}\left(\frac{G'}{G}\right)^{-1} & \beta_1 \neq 0 \end{cases} \quad ⑫$$

且 $\alpha_1, \alpha_0, \beta_1, \beta_0, \beta_{-1}, \alpha_{-1}$ 为常数. 由上式可计算得到

$$\begin{cases} p^2(\xi) = \alpha_1^2\left(\frac{G'}{G}\right)^2 + 2\alpha_1\alpha_0\left(\frac{G'}{G}\right) + \alpha_0^2 + \\ \quad 2\alpha_1\alpha_{-1} + 2\alpha_{-1}\alpha_0\left(\frac{G'}{G}\right)^{-1} + \alpha_{-1}^2\left(\frac{G'}{G}\right)^{-2} \\ q^2(\xi) = \beta_1^2\left(\frac{G'}{G}\right)^2 + 2\beta_1\beta_0\left(\frac{G'}{G}\right) + \beta_0^2 + \\ \quad 2\beta_1\beta_{-1} + 2\beta_{-1}\beta_0\left(\frac{G'}{G}\right)^{-1} + \beta_{-1}^2\left(\frac{G'}{G}\right)^{-2} \\ p'(\xi) = -\alpha_1\left(\frac{G'}{G}\right)^2 - \alpha_1\lambda\left(\frac{G'}{G}\right) - \alpha_1\mu + \\ \quad \alpha_{-1} + \alpha_{-1}\lambda\left(\frac{G'}{G}\right)^{-1} + \alpha_{-1}\mu\left(\frac{G'}{G}\right)^{-2} \\ q'(\xi) = -\beta_1\left(\frac{G'}{G}\right)^2 - \beta_1\lambda\left(\frac{G'}{G}\right) - \beta_1\mu + \\ \quad \beta_{-1} + \beta_{-1}\lambda\left(\frac{G'}{G}\right)^{-1} + \beta_{-1}\mu\left(\frac{G'}{G}\right)^{-2} \end{cases} \quad ⑬$$

将 ⑬ 式代入方程 ⑤⑥,同时合并$\left(\frac{G'}{G}\right)$的所有同次幂项,这样方程 ⑤⑥ 的左端就转化为一个关于$\left(\frac{G'}{G}\right)$的多项式. 令这个多项式的各项系数为 0,则得到关于 $\alpha_1, \alpha_0, \alpha_{-1}, \beta_1, \beta_0, \beta_{-1}, V, \mu, \lambda, C_1$ 和 C_2 的联立代数方程组为

$$\begin{cases} -2: -\alpha_{-1}\mu + \beta_{-1}^2 = 0 \\ -1: -V\alpha_{-1} - \alpha_{-1}\lambda + 2\beta_{-1}\beta_0 = 0 \\ 0: C_1 - V\alpha_0 + \alpha_1\mu + \beta_0^2 - \alpha_{-1} + 2\beta_1\beta_{-1} = 0 \\ 1: -V\alpha_1 + \alpha_1\lambda + 2\beta_1\beta_0 = 0 \\ 2: \alpha_1 + \beta_1^2 = 0 \\ -2: \beta_{-1}\mu - \alpha_{-1}^2 = 0 \\ -1: -V\beta_{-1} + \beta_{-1}\lambda - 2\alpha_{-1}\alpha_0 = 0 \\ 0: C_2 - V\beta_0 - \beta_1\mu - \alpha_0^2 + \beta_{-1} - 2\alpha_1\alpha_{-1} = 0 \\ 1: -V\beta_1 - \beta_1\lambda - 2\alpha_1\alpha_0 = 0 \\ 2: -\beta_1 - \alpha_1^2 = 0 \end{cases}$$

求解以上代数方程可得两组解,即

第一组解:

$$\alpha_1 = -1 \quad \beta_1 = -1 \quad \alpha_{-1} = 0 \quad \beta_{-1} = 0$$
$$V = 2\beta_0 + \lambda \quad C_1 = -3\beta_0^2 - 3\lambda\beta_0 - \lambda^2 - 2\mu$$
$$\alpha_0 = -\beta_0 - \lambda \quad C_2 = 3\beta_0^2 + 3\lambda\beta_0 + \lambda^2 + 2\mu$$

其中,μ,λ 和 β_0 是任意常数.

第二组解:

$$\alpha_1 = -1 \quad \beta_1 = -1 \quad \alpha_{-1} = \mu \quad \beta_{-1} = \mu$$
$$\lambda = 0 \quad V = 2\beta_0 \quad \alpha_0 = -\beta_0$$
$$C_1 = -3\beta_0^2 + 4\mu \quad C_2 = 3\beta_0^2 - 4\mu$$

其中,μ 和 β_0 是任意常数.

1.1 求解第一组解

将第一组解中的相关数据代入 ⑫ 可以得

$$\begin{cases} p(\xi) = -\left(\frac{G'}{G}\right) - \beta_0 - \lambda \\ q(\xi) = -\left(\frac{G'}{G}\right) + \beta_0 \end{cases} \quad ⑭$$

其中 $\xi = x - (2\beta_0 + \lambda)t$.

将方程 ⑨ 的通解代入 ⑭ 中,可以得到 MSS 方程 ①② 的如下 3 种类型的行波解.

其一, 当 $\lambda^2 - 4\mu > 0$ 时, 方程 ⑨ 的通解为[7]

$$G(\xi)=A_1e^{\frac{-\lambda+\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\xi}+A_2e^{\frac{-\lambda-\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\xi}$$

将其带入 ⑭ 可得双曲函数解

$$p_1(\xi)=-\frac{\lambda}{2}-\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\cdot\frac{B_1\sinh\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}\xi}{2}+B_2\cosh\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}\xi}{2}}{B_2\sinh\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}\xi}{2}+B_1\cosh\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}\xi}{2}}-\beta_0$$

$$q_1(\xi)=\frac{\lambda}{2}-\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\cdot\frac{B_1\sinh\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}\xi}{2}+B_2\cosh\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}\xi}{2}}{B_2\sinh\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}\xi}{2}+B_1\cosh\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}\xi}{2}}+\beta_0 \qquad ⑮$$

其中，$\xi=x-(2\beta_0+\lambda)t$，$B_1=A_1+A_2$ 和 $B_2=A_1-A_2$ 都是任意常数.

特别地，当 $B_1>0$，$B_1^2>B_2^2$ 时，上述解可以约化为孤子解

$$p_1(\xi)=-\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 4\mu}\xi+\xi_0\right)-\beta_0$$

$$q_1(\xi)=\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\xi+\xi_0\right)+\beta_0$$

其中，$\xi_0=\tanh^{-1}\frac{B_2}{B_1}$.

如果 $B_1\neq 0$，$B_2=0$，那么 ⑮ 还可以写为

$$p_1(\xi)=-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\tanh\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\xi-\beta_0$$

$$q_1(\xi)=\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\tanh\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\xi+\beta_0$$

其二，当 $\lambda^2-4\mu<0$ 时，方程 ⑨ 的通解为

$$G(\xi)=e^{-\frac{\lambda}{2}\xi}\left(A_1\cos\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\xi+A_2\sin\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\xi\right)$$

将该式带入 ⑭ 可得三角函数解

$$p_2(\xi)=-\frac{\lambda}{2}-\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\cdot\frac{-A_1\sin\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}\xi}{2}+A_2\cos\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}\xi}{2}}{A_1\sin\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}\xi}{2}+A_2\cos\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}\xi}{2}}-\beta_0$$

$$q_2(\xi)=\frac{\lambda}{2}-\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\cdot\frac{-A_1\sin\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}\xi}{2}+A_2\cos\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}\xi}{2}}{A_1\sin\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}\xi}{2}+A_2\cos\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}\xi}{2}}+\beta_0$$

其中，$\xi=x-(2\beta_0+\lambda)t$，$A_1$ 和 A_2 是任意常数.

其三，当 $\lambda^2-4\mu=0$ 时，方程 ⑨ 的通解为

$$G(\xi)=(A_1+A_2\xi)e^{\frac{-\lambda}{2}\xi}$$

将该式带入 ⑭ 可得有理解

$$\begin{cases}p_3(\xi)=-\frac{\lambda}{2}-\frac{A_2}{A_2\xi+A_1}-\beta_0\\ q_3(\xi)=\frac{\lambda}{2}-\frac{A_2}{A_2\xi+A_1}+\beta_0\end{cases}$$

其中，$\xi=x-(2\beta_0+\lambda)t$，$A_1$ 和 A_2 是任意常数.

1.2 求解第二组解

将第二组解中的相关数据代入 ⑫ 可得

$$\begin{cases}p(\xi)=-\left(\frac{G'}{G}\right)-\beta_0+\mu\left(\frac{G'}{G}\right)^{-1}\\ q(\xi)=-\left(\frac{G'}{G}\right)+\beta_0+\mu\left(\frac{G'}{G}\right)^{-1}\end{cases} \qquad ⑯$$

其中，$\xi=x-2\beta_0t$.

由于 $\lambda=0$，所以方程 ⑨ 变为

$$G''+\mu G=0 \qquad ⑰$$

将方程 ⑰ 的通解代入 ⑯ 中，得到 MSS 方程 ①② 的另外 3 种类型的行波解.

其一，当 $\mu<0$ 时，有

$$G(\xi)=A_1e^{\sqrt{-\mu}\xi}+A_2e^{-\sqrt{-\mu}\xi}$$

此时方程 ①② 的双曲函数解为

$$p_4(\xi)=-\sqrt{-\mu}\cdot\frac{B_1\sinh\sqrt{-\mu}\xi+B_2\cosh\sqrt{-\mu}\xi}{B_2\sinh\sqrt{-\mu}\xi+B_1\cosh\sqrt{-\mu}\xi}-\beta_0-\sqrt{-\mu}\cdot\frac{B_2\sinh\sqrt{-\mu}\xi+B_1\cosh\sqrt{-\mu}\xi}{B_1\sinh\sqrt{-\mu}\xi+B_2\cosh\sqrt{-\mu}\xi}$$

$$q_4(\xi) = -\sqrt{-\mu}\cdot\frac{B_1\sinh\sqrt{-\mu}\xi + B_2\cosh\sqrt{-\mu}\xi}{B_2\sinh\sqrt{-\mu}\xi + B_1\cosh\sqrt{-\mu}\xi} + \beta_0 - \sqrt{-\mu}\cdot\frac{B_2\sinh\sqrt{-\mu}\xi + B_1\cosh\sqrt{-\mu}\xi}{B_1\sinh\sqrt{-\mu}\xi + B_2\cosh\sqrt{-\mu}\xi}$$

其中,$\xi = x - 2\beta_0 t$,$B_1 = A_1 + A_2$ 和 $B_2 = A_1 - A_2$ 是任意常数.

特别地,当 $B_1 > 0$,$B_1^2 > B_2^2$ 时,上述方程的解可以约化为

$$p_4(\xi) = -\sqrt{-\mu}\tanh(\sqrt{-\mu}\xi + \xi_0) - \beta_0 - \sqrt{-\mu}\coth(\sqrt{-\mu}\xi + \xi_0)$$

$$q_4(\xi) = -\sqrt{-\mu}\tanh(\sqrt{-\mu}\xi + \xi_0) + \beta_0 - \sqrt{-\mu}\coth(\sqrt{-\mu}\xi + \xi_0)$$

其中,$\xi_0 = \tanh^{-1}\frac{B_2}{B_1}$.

其二,当 $\mu > 0$ 时,有

$$G(\xi) = A_1\cos\sqrt{\mu}\xi + A_2\sin\sqrt{\mu}\xi$$

由此可得 MSS 方程的三角函数解为

$$p_5(\xi) = -\frac{\sqrt{\mu}(-A_1\sin\sqrt{\mu}\xi + A_2\cos\sqrt{\mu}\xi)}{A_1\cos\sqrt{\mu}\xi + A_2\sin\sqrt{\mu}\xi} - \beta_0 + \frac{\sqrt{\mu}(A_1\cos\sqrt{\mu}\xi + A_2\sin\sqrt{\mu}\xi)}{-A_1\sin\sqrt{\mu}\xi + A_2\cos\sqrt{\mu}\xi}$$

$$q_5(\xi) = -\frac{\sqrt{\mu}(-A_1\sin\sqrt{\mu}\xi + A_2\cos\sqrt{\mu}\xi)}{A_1\cos\sqrt{\mu}\xi + A_2\sin\sqrt{\mu}\xi} + \beta_0 + \frac{\sqrt{\mu}(A_1\cos\sqrt{\mu}\xi + A_2\sin\sqrt{\mu}\xi)}{-A_1\sin\sqrt{\mu}\xi + A_2\cos\sqrt{\mu}\xi}$$

其中,$\xi = x - 2\beta_0 t$,A_1 和 A_2 是任意常数.

其三,当 $\mu = 0$ 时,有

$$G(\xi) = A_1 + A_2\xi$$

将该通解代入 ①② 可得

$$p_6(\xi) = -\frac{A_2}{A_1 + A_2\xi} - \beta_0$$

$$q_6(\xi) = -\frac{A_2}{A_1 + A_2\xi} + \beta_0$$

其中,$\xi = x - 2\beta_0 t$,A_1 和 A_2 是任意常数.

2 结论

本文利用$\left(\frac{G'}{G}\right)$展开法求解了 MSS 方程,得到了该方程的双由函数解. 三角函数解和有理函数解 3 种类型的精确行波解,大大丰富了该方程的解系,为该方程的应用及其他性质的研究提供了依据.

参考文献:

[1] WANG M L, LI X Z, ZHANG J L. The $\left(\frac{G'}{G}\right)$-expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics [J]. Physics Letter A, 2008, 372(4): 417.

[2] 李叶庭. $\left(\frac{G'}{G+G'}\right)$展开法在非线性发展方程求解中的应用[D]. 呼和浩特:内蒙古工业大学,2014.

[3] 高华. Exp_函数法和$\left(\frac{G'}{G}\right)$展开法在非线性发展方程求解中的应用[D]. 咸阳:西北农林科技大学,2010.

[4] 韩园媛. 扩展的$\left(\frac{G'}{G}\right)$展开法及其应用[D]. 沈阳:沈阳师范大学,2013.

[5] MILHAILOV A V, SHABAT A B, SOKOLOV V V. Thesymmetry approach to classification of integrableequations[M]//What is integrability? Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 1991: 115 - 184.

[6] HE G L, GENG X G, WU L H. The application of trigonal curve to the Mikhailov-Shabat-Sokolov flows [J]. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik, 2016, 67: 1.

[7] 王高雄,周之铭,朱思铭. 常微分方程[M]. 3 版. 北京:高等教育出版社,2006.