轻工学报® 2019 年 5 月 第 34 卷 第 3 期
JOURNAL OF LIGHT INDUSTRY　Vol. 34 No. 3 May 2019

引用格式:聂辉，张树义，张芯语. 高阶 Cauchy 中值定理中间点函数渐近性与可微性的再研究[J]. 轻工学报,2019,34(3):92-102.
中图分类号:O171　　文献标识码:A
DOI:10.3969/j. issn. 2096-1553. 2019. 03. 011
文章编号:2096-1553(2019)03-0092-11

高阶 Cauchy 中值定理中间点函数渐近性与可微性的再研究

Again study the asymptotic behavior and the differentiability of intermediate point function for high order Cauchy mean value theorem

聂辉，张树义，张芯语
NIE Hui, ZHANG Shuyi, ZHANG Xinyu

渤海大学 数理学院,辽宁 锦州 121013
College of Mathematics and Physics, Bohai University, Jinzhou 121013, China

关键词:
比较函数;高阶 Cauchy 中值定理;中间点函数;渐近性;可微性

Key words:
comparison function; high order Cauchy mean value theorem; intermediate point function; asymptotic behavior; differentiability

摘要:利用比较函数概念,研究高阶 Cauchy 中值定理中间点函数的渐近性,在一定条件下,建立了高阶 Cauchy 中值定理中间点函数更广泛的渐近估计式;作为推论还获得了高阶 Cauchy 中值定理中间点函数的一阶可微性. 所得结果推广和改进了有关文献中的结果,丰富了中值定理理论.

收稿日期:2018-06-12
基金项目:渤海大学研究生创新基金项目(YJC20170036)
作者简介:聂辉(1995—),女,辽宁省铁岭市人,渤海大学硕士研究生,主要研究方向为非线性泛函分析.
通信作者:张树义(1960—),男,辽宁省锦州市人,渤海大学教授,主要研究方向为非线性泛函分析.

Abstract: By using the concept of comparison function, the asymptotic behavior of the intermediate point function of the high order Cauchy mean value theorem was studied. Under certain conditions, a broader asymptotic estimate of the intermediate point function of the high order Cauchy mean value theorem was established. The first-order differentiability of the intermediate point function of the high order Cauchy mean value theorem was obtained. The obtained results generalized and improved the results in the relevant literature, and enriched the theory of the median theorem.

1982 年 A. G. Azpeitja 等[1-2]开始关于中值定理中间点渐近性的研究. 之后,一些学者陆续对各种中值定理中间点的渐近性质展开研究[3-11]. 其中,文献[7]将文献[1]结果推广为 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{\xi-a}{x-a}=\left(\dfrac{n!\ \Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)}\right)^{1/\alpha}$(这里 $\alpha>0,\Gamma(\cdot)$ 为 Gamma 函数),通过对中值定理中间点渐近性的研究可以确定中间点在某区间内的渐近位置,从而为近似计算提供一种有效且比较精确的计算方法. 进一步通过定义中间点函数,再借助渐近性质,可以研究中值定理中间点函数的可微性. 因此,研究中间点函数的渐近性、可微性,有一定的理论意义. 张树义等在文献[12-13]中研究了高阶 Cauchy 中值定理中间点函数的渐近性与一阶可微性,其中文献[13]在一定条件下证明了高阶 Cauchy 中值定理中间点函数 $c(x)$ 满足

$$\lim_{x\to a}\theta(x)=\lim_{x\to a}\frac{c(x)-a}{x-a}=\frac{1}{n}\left(\frac{\Gamma(\gamma+1)\Gamma(n+\alpha+1)\sum\limits_{j=0}^{n}(-1)^jC_n^j(n-j)^{n+\gamma}}{\Gamma(n+\gamma+1)\Gamma(\alpha+1)\sum\limits_{j=0}^{n}(-1)^jC_n^j(n-j)^{n+\alpha}}\right)^{\frac{1}{\gamma-\alpha}}$$

文献[14-20]研究了其他几种中值定理中间点函数的渐近性与可微性. 其中,文献[17]使用比较函数讨论泰勒中值定理中间点函数的渐近性和一阶可微性,证明了泰勒中值定理中间点函数 $c(x)=a+(x-a)\theta(x)$ 满足更为广泛的渐近估计式 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{\varphi(a+(x-a)\theta(x))}{\varphi(x)}=\dfrac{n!}{C_n^{(\varphi)}}$.

在此基础上,本文拟将文献[12-13]中得到的高阶 Cauchy 中值定理中间点函数渐近性的相关结果扩展到比较函数的情形,利用比较函数概念建立高阶 Cauchy 中值定理中间点函数更为广泛的渐近估计式,以期推广文献[10-20]中的相关结果.

1 预备知识

高阶 Cauchy 中值定理 设 a 和 b 是实数且 $a<b,f,g:[a,b]\to R$. 如果函数 f,g 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内 n 次可微且 $g^{(n)}(x)\neq 0$,则存在 $c\in(a,b)$,使

$$\frac{\sum\limits_{j=0}^{n}(-1)^jC_n^jf[b-j(b-a)/n]}{\sum\limits_{j=0}^{n}(-1)^jC_n^jg[b-j(b-a)/n]}=\frac{f^{(n)}(c)}{g^{(n)}(c)}$$

需指出,高阶 Cauchy 中值定理中间点 c 唯一的充分条件为:$f^{(n)}(x)/g^{(n)}(x)$ 是单射. 设 I 为 R 上的一个区间,$a\in I$ 为区间 I 上的左端点,函数 $f,g:I\to R$,如果函数 f 与 g 在 I 上 n 次可微,$g^{(n)}(x)\neq 0$,则由高阶 Cauchy 中值定理可得,$\forall x\in I-\{a\}$,在开区间 (a,x) 上,存在一点 c_x,使

$$\frac{\sum_{j=0}^{n}(-1)^j C_n^j f[x-j(x-a)/n]}{\sum_{j=0}^{n}(-1)^j C_n^j g[x-j(x-a)/n]}=\frac{f^{(n)}(c_x)}{g^{(n)}(c_x)} \qquad ①$$

如果$f^{(n)}(x)/g^{(n)}(x)$是单射,则点c_x是唯一的,进而可以定义$c:I-\{a\}\to I-\{a\}$为$c(x)=c_x$,使得

$$\frac{\sum_{j=0}^{n}(-1)^j C_n^j f[x-j(x-a)/n]}{\sum_{j=0}^{n}(-1)^j C_n^j g[x-j(x-a)/n]}=\frac{f^{(n)}(c(x))}{g^{(n)}(c(x))} \qquad ②$$

如果$f^{(n)}(x)/g^{(n)}(x)$不是单射的,则使①式成立的点c_x一般不是唯一的. 如果对$\forall x\in I-\{a\}$,在开区间(a,x)上选取一个c_x使①式成立,那么也可以定义函数$c:I-\{a\}\to I-\{a\}$为$c(x)=c_x$,使②式成立.

定理 1[12]　设I是R上的一个区间,$a\in I$是区间I上的左端点,函数$f,g:I\to R$,如果函数f与g在I上n次可微,则存在一函数$c:I-\{a\}\to I-\{a\}$,使得②式成立. 此外,如果$f^{(n)}(x)/g^{(n)}(x)$是单射的,则点$c(x)$是唯一的.

因为$\forall x\in I-\{a\}$,$|c(x)-a|\leqslant|x-a|$,所以$\lim\limits_{x\to a}c(x)=a$. 于是可定义中间点函数$\bar{c}:I\to I$为$\bar{c}(x)=\begin{cases}c(x) & x\in I-\{a\}\\ a & x=a\end{cases}$,显然$\bar{c}(x)$在点$x=a$连续.

定义 1[4-5]　设$\Psi(x)$定义在半开区间$(a,b]$$(b>0)$上,$\varphi(x)$在半开区间$(a,b]$上存在$m(m\geqslant1)$阶导数且满足下列条件:

i) $\lim\limits_{x\to a^+}[(x-a)^m\cdot\varphi(x)]^{(i)}=0,i=0,1,2,\cdots,m-1$;

ii) $\lim\limits_{x\to a^+}(x-a)^i\cdot\varphi^{(i)}(x)/\varphi(x)=\lambda_{\varphi_i}$,$\lambda_{\varphi_i}$为常数,$i=0,1,2,\cdots,m$,$\lambda_{\varphi_0}=1$;

iii) $C_k^{(\varphi)}\overset{def}{=}\sum_{i=0}^{k}(k-i)!\cdot(C_k^i)^2\lambda_{\varphi_i}\neq0,k=1,2,\cdots,m.$

如果$\lim\limits_{x\to a^+}\Psi(x)/\varphi(x)$存在非零极限,则称$\varphi(x)$是当$x\to a^+$时关于$\Psi(x)$的比较函数,并称此非零极限为比较值,简称比值.

例 1　在$(0,b]$$(b>0)$上取$\varphi(x)=1/\sqrt{x}$,$\Psi_1(x)=2+1/\sqrt{x}$,$\Psi_2(x)=[\cos(\sqrt{x}+1)]/\sqrt{x}$,则容易验证$\varphi(x)$是当$x\to0^+$时关于$\Psi_1(x)$和$\Psi_2(x)$的比较函数.

引理 1[4-5]　设$x>0$,$\varphi(t)=x^\alpha$,α为实数,$\alpha>-1$,$n\geqslant1$,$\Gamma(\cdot)$为 Gamma 函数,则

$$\sum_{i=0}^{n}(n-1)!\cdot(C_n^i)^2\lambda_{\varphi_i}=\Gamma(n+\alpha+1)/\Gamma(\alpha+1)$$

其中,$\lambda_{\varphi_i}=\lim\limits_{t\to0^+}t^i\cdot\varphi^{(i)}(t)/\varphi(t)=\begin{cases}1 & i=1\\ \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-i+1) & i=1,2,\cdots,n\end{cases}$.

引理 2[11-12]　i) $\sum_{j=0}^{n}(-1)^jC_n^j(n-j)^k=0(0\leqslant k<n)$;

ii) $\sum_{j=0}^{n}(-1)^jC_n^j(n-j)^n=n!$;

iii) $\sum_{j=0}^{n}(-1)^j C_n^j (n-j)^{n+1} = \frac{1}{2}n(n+1)!$

由引理 2 容易证明下列引理 3 成立.

引理 3 设 I 是 R 上的一个区间, $a \in I$ 是区间 I 的左端点. $\Psi: I \to R$ 在 I 上 n 次可微且在半开区间 $(a,b] \subset I$ 上存在 n 阶导数的函数 $\varphi(x)$ 是当 $x \to a^+$ 时关于 $\Psi^{(n)}(x)$ 的比较函数,比值为 A. 再设

$$\tilde{\Psi}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sum_{j=0}^{n}(-1)^j C_n^j \Psi[x - j(x-a)/n]}{(x-a)^n \varphi(x)} & x \in I - \{a\} \\ \dfrac{A}{C_n^{(\varphi)}}\left(\sum_{j=0}^{n}(-1)^j C_n^j \left(1 - \dfrac{j}{n}\right)^n Z(n,j)\right) & x = a \end{cases}$$

则下列结论成立:

i) $\tilde{\Psi}(x)$ 在 I 上连续且 $\tilde{\Psi}(a) = \frac{A}{C_n^{(\varphi)}}\left(\sum_{j=0}^{n}(-1)^j C_n^j \left(1 - \frac{j}{n}\right)^n Z(n,j)\right)$;

ii) 当 $\varphi(x) = 1$ 时, $\tilde{\Psi}(a) = \frac{A}{n^n}$;

iii) $\sum_{j=0}^{n}(-1)^j C_n^j \Psi[x - j(x-a)/n] = \left(\frac{A}{C_n^{(\varphi)}}\left(\sum_{j=0}^{n}(-1)^j C_n^j \left(1 - \frac{j}{n}\right)^n Z(n,j)\right) + \xi\right)(x-a)^n \varphi(x)$.

其中, $Z(n,j) = \lim_{x \to a^+} \frac{\varphi[x - j(x-a)/n]}{\varphi(x)}$, $\xi \to 0 (x \to a^+)$.

2 主要结果

定理 2 设 I 是 R 上的一个区间, $a \in I$ 是区间 I 的左端点,函数 $f, g: I \to R$ 满足下列条件:

i) 函数 f 与 g 在区间 I 上有直至 n 阶导数且 $g^{(n)}(x) \neq 0$;

ii) 在半开区间 $(a,b] \subset I$ 上存在 n 阶导数的函数 $\varphi(x)$ 和 $\Psi(x)$ 分别是当 $x \to a^+$ 时关于 $f^{(n)}(x)$ 和 $g^{(n)}(x)$ 的比较函数且比值分别为 A 和 B;

iii) $\frac{B}{C_n^{(\Psi)}}\left(\sum_{j=0}^{n}(-1)^j C_n^j \left(1 - \frac{j}{n}\right)^n \Omega(n,j)\right) \neq \frac{A}{C_n^{(\varphi)}}\left(\sum_{j=0}^{n}(-1)^j C_n^j \left(1 - \frac{j}{n}\right)^n \Upsilon(n,j)\right)$.

其中, $\Upsilon(n,j) = \lim_{x \to a^+} \frac{\varphi[x - j(x-a)/n]}{\varphi(x)}$, $\Omega(n,j) = \lim_{x \to a^+} \frac{\Psi[x - j(x-a)/n]}{\Psi(x)}$ 且 $\varphi(x) \neq \Psi(x)$,

则下列结论成立:

1° 存在实数 $\delta > 0$,使 $(a, a+\delta) \subseteq I$,且 $\forall x \in (a, a+\delta)$,有 $f^{(n)}(x)\tilde{g}(x) \neq \tilde{f}(x) g^{(n)}(x)$,其中

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sum_{j=0}^{n}(-1)^j C_n^j f[x - j(x-a)/n]}{(x-a)^n \varphi(x)} & x \in (a, a+\delta) \\ \dfrac{A}{C_n^{(\varphi)}}\left(\sum_{j=0}^{n}(-1)^j C_n^j \left(1 - \dfrac{j}{n}\right)^n \Upsilon(n,j)\right) & x = a \end{cases}$$

$$\tilde{g}(x)=\begin{cases}\dfrac{\sum\limits_{j=0}^{n}(-1)^{j}C_n^j g[x-j(x-a)/n]}{(x-a)^n\Psi(x)} & x\in(a,a+\delta)\\ \dfrac{B}{C_n^{(\Psi)}}\left(\sum\limits_{j=0}^{n}(-1)^{j}C_n^j\left(1-\dfrac{j}{n}\right)^n\Omega(n,j)\right) & x=a\end{cases}$$

2° 若再设 $\forall x\in(a,a+\delta)$，$(f^{(n)}(x)/g^{(n)}(x))'\neq 0$，则对 $\forall x\in(a,a+\delta)$，存在唯一函数 $c:(a,a+\delta)\to(a,a+\delta)$，使

$$\frac{\sum\limits_{j=0}^{n}(-1)^{j}C_n^j f[x-j(x-a)/n]}{\sum\limits_{j=0}^{n}(-1)^{j}C_n^j g[x-j(x-a)/n]}=\frac{f^{(n)}(c(x))}{g^{(n)}(c(x))} \qquad ③$$

3° 函数 $\theta:(a,a+\delta)\to(0,1)$ 定义为

$$\theta(x)=\frac{c(x)-a}{x-a}\qquad x\in(a,a+\delta) \qquad ④$$

且有下列性质：

a）对 $\forall x\in(a,a+\delta)$，有

$$\frac{\sum\limits_{j=0}^{n}(-1)^{j}C_n^j f[x-j(x-a)/n]}{\sum\limits_{j=0}^{n}(-1)^{j}C_n^j g[x-j(x-a)/n]}=\frac{f^{(n)}(a+(x-a)\theta(x))}{g^{(n)}(a+(x-a)\theta(x))} \qquad ⑤$$

b）有渐近估计式

$$\lim_{x\to a^+}\frac{\varphi((x-a)\theta(x))\Psi(x)}{\Psi((x-a)\theta(x))\varphi(x)}=\frac{C_n^{(\Psi)}\left(\sum\limits_{j=0}^{n}(-1)^{j}C_n^j\left(1-\dfrac{j}{n}\right)^n\Upsilon(n,j)\right)}{C_n^{(\varphi)}\left(\sum\limits_{j=0}^{n}(-1)^{j}C_n^j\left(1-\dfrac{j}{n}\right)^n\Omega(n,j)\right)}$$

证明　1° 由定理 2 条件和引理 3 可知，有

$$\lim_{x\to a^+}(f^{(n)}(x)\tilde{g}(x)-\tilde{f}(x)g^{(n)}(x))=$$

$$\frac{A}{C_n^{(\varphi)}}\left(\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j}C_n^j\left(1-\frac{j}{n}\right)^n\Upsilon(n,j)\right)-\frac{B}{C_n^{(\Psi)}}\left(\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j}C_n^j\left(1-\frac{j}{n}\right)^n\Omega(n,j)\right)\neq 0$$

因此存在一实数 $\delta>0$，使 $(a,a+\delta)\subseteq I$ 且 $\forall x\in(a,a+\delta)$，有 $f^{(n)}(x)\tilde{g}(x)\neq\tilde{f}(x)g^{(n)}(x)$.

2° 因 $(f^{(n)}(x)/g^{(n)}(x))'\neq 0$，所以 $f^{(n)}(x)/g^{(n)}(x)$ 在 $(a,a+\delta)$ 上严格单调，进而 $f^{(n)}(x)/g^{(n)}(x)$ 是单射，因此存在唯一函数 $c:(a,a+\delta)\to(a,a+\delta)$，使得式 ③ 成立.

3° a）由式 ③ 和式 ④ 即得证.

b）由引理 3，有

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j}C_n^j f[x-j(x-a)/n]=$$

$$\left(\frac{A}{C_n^{(\varphi)}}\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j}C_n^j\left(1-\frac{j}{n}\right)^n\Upsilon(n,j)+\xi_1\right)(x-a)^n\varphi(x) \qquad ⑥$$

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j}C_n^j g[x-j(x-a)/n]=$$

$$\left(\frac{B}{C_n^{(\Psi)}}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j C_n^j\left(1-\frac{j}{n}\right)^n\Omega(n,j)+\xi_2\right)(x-a)^n\Psi(x) \qquad ⑦$$

其中,$\xi_1\to0,\xi_2\to0(x\to a^+)$. 由定理 2 中条件 ii),得

$$f^{(n)}(a+(x-a)\theta(x))=(A+\xi_3)((x-a)\theta(x))^{\alpha} \qquad ⑧$$

$$g^{(n)}(a+(x-a)\theta(x))=(B+\xi_4)((x-a)\theta(x))^{\beta} \qquad ⑨$$

其中,$\xi_3\to0,\xi_4\to0(x\to a^+)$. 把式 ⑥⑦⑧⑨ 代入式 ⑤,并简单运算得

$$(B+\xi_4)\Psi((x-a)\theta(x))\cdot\left(\frac{A}{C_n^{(\varphi)}}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j C_n^j\left(1-\frac{j}{n}\right)^n\Upsilon(n,j)+\xi_1\right)\varphi(x)=$$

$$(A+\xi_3)\varphi((x-a)\theta(x))\cdot\left(\frac{B}{C_n^{(\Psi)}}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j C_n^j\left(1-\frac{j}{n}\right)^n\Omega(n,j)+\xi_2\right)\Psi(x) \qquad ⑩$$

注意到,$\xi_1\to0,\xi_2\to0,\xi_3\to0,\xi_4\to0(x\to a^+)$ 和 $|(x-a)\theta(x)|\leqslant|x-a|$,由式 ⑩ 可推出

$$\lim_{x\to a^+}\frac{\varphi((x-a)\theta(x))\Psi(x)}{\Psi((x-a)\theta(x))\varphi(x)}=\frac{C_n^{(\Psi)}\left(\sum_{j=0}^{n}(-1)^j C_n^j\left(1-\frac{j}{n}\right)^n\Upsilon(n,j)\right)}{C_n^{(\varphi)}\left(\sum_{j=0}^{n}(-1)^j C_n^j\left(1-\frac{j}{n}\right)^n\Omega(n,j)\right)}$$

定理 2 证毕.

如果 $\varphi(x)=\Psi(x)$,则定理 2 不再成立.

定理 3 在定理 2 的条件下,若 $\varphi(x)=\Psi(x)$,假设在半开区间 $(a,b]\subset I$ 上存在 n 阶导数的函数 $\delta(x)$ 是当 $x\to a^+$ 时关于 $f^{(n)}(x)-(A/B)g^{(n)}(x)$ 的比较函数且比值为 D,且

$$\frac{Dg^{(n)}(a)}{C_n^{(\delta)}}\left(\sum_{j=0}^{n}(-1)^j C_n^j\left(1-\frac{j}{n}\right)^n\Delta(n,j)\right)\neq0$$

其中 $\Delta(n,j)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{\delta[x-j(x-a)/n]}{\delta(x)}$,则有下列结论成立:

1° 存在实数 $\delta>0$,使 $(a,a+\delta)\subseteq I$,且 $\forall x\in(a,a+\delta)$,有 $\tilde f(x)g^{(n)}(x)\neq0$, 其中

$$\tilde f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sum\limits_{j=0}^{n}(-1)^j C_n^j f[x-j(x-a)/n]-(A/B)\sum\limits_{j=0}^{n}(-1)^j C_n^j g[x-j(x-a)/n]}{(x-a)^n\delta(x)} & x\in(a,a+\delta)\\[2ex] \dfrac{D}{C_n^{(\delta)}}\left(\sum\limits_{j=0}^{n}(-1)^j C_n^j\left(1-\dfrac{j}{n}\right)^n\Delta(n,j)\right) & x=a\end{cases}$$

2° 若再设 $\forall x\in(a,a+\delta),(f^{(n)}(x)/g^{(n)}(x))'\neq0$, 则对 $\forall x\in(a,a+\delta)$,存在唯一函数 $c:(a,a+\delta)\to(a,a+\delta)$,使

$$\frac{\sum_{j=0}^{n}(-1)^j C_n^j f[x-j(x-a)/n]}{\sum_{j=0}^{n}(-1)^j C_n^j g[x-j(x-a)/n]}=\frac{f^{(n)}(c(x))}{g^{(n)}(c(x))} \qquad ⑪$$

3° 函数 $\theta:(a,a+\delta)\to(0,1)$ 定义为

$$\theta(x)=\frac{c(x)-a}{x-a}\qquad x\in(a,a+\delta) \qquad ⑫$$

且有下列性质：

a）对 $\forall x \in (a,a+\delta)$，有

$$\frac{\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j}C_{n}^{j}f[x-j(x-a)/n]}{\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j}C_{n}^{j}g[x-j(x-a)/n]}=\frac{f^{(n)}(a+(x-a)\theta(x))}{g^{(n)}(a+(x-a)\theta(x))} \tag{13}$$

b）有渐近估计式

$$\lim_{x\to a}\frac{\delta((x-a)\theta(x))\varphi(x)}{\varphi((x-a)\theta(x))\delta(x)}=\frac{C_{n}^{(\varphi)}\left(\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j}C_{n}^{j}\left(1-\frac{j}{n}\right)^{n}\Delta(n,j)\right)}{C_{n}^{(\delta)}\left(\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j}C_{n}^{j}\left(1-\frac{j}{n}\right)^{n}\Omega(n,j)\right)}$$

证明　1° 由定理3条件和引理2，有

$$\lim_{x\to a^{+}}\tilde{f}(x)g^{(n)}(x)=\frac{Dg^{(n)}(a)}{C_{n}^{(\delta)}}\left(\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j}C_{n}^{j}\left(1-\frac{j}{n}\right)^{n}\Delta(n,j)\right)\neq 0$$

因此存在一实数 $\delta>0$，使 $(a,a+\delta)\subseteq I$ 且 $\forall x\in(a,a+\delta)$，有 $\tilde{f}(x)g^{(n)}(x)\neq 0$.

2° 因 $(f^{(n)}(x)/g^{(n)}(x))'\neq 0$，故 $f^{(n)}(x)/g^{(n)}(x)$ 在 $(a,a+\delta)$ 上严格单调，进而 $f^{(n)}(x)/g^{(n)}(x)$ 是单射，因此存在唯一函数 $c:(a,a+\delta)\to(a,a+\delta)$，使得式⑪成立.

3° a）由式⑪和式⑫即得证.

b）由引理3，有

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j}C_{n}^{j}f[x-j(x-a)/n]-(A/B)\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j}C_{n}^{j}g[x-j(x-a)/n]=$$
$$\left(\frac{D}{C_{n}^{(\delta)}}\left(\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j}C_{n}^{j}\left(1-\frac{j}{n}\right)^{n}\Delta(n,j)\right)+\xi_{1}\right)(x-a)^{n}\delta(x) \tag{14}$$

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j}C_{n}^{j}g[x-j(x-a)/n]=\left(\frac{B}{C_{n}^{(\varphi)}}\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j}C_{n}^{j}\left(1-\frac{j}{n}\right)^{n}\Omega(n,j)+\xi_{2}\right)(x-a)^{n}\varphi(x) \tag{15}$$

其中，$\xi_{1}\to 0,\xi_{2}\to 0(x\to a^{+})$. 由定理3的条件得

$$f^{(n)}(a+(x-a)\theta(x))=(A/B)g^{(n)}(a+(x-a)\theta(x))+(D+\xi_{3})\delta((x-a)\theta(x)) \tag{16}$$

$$g^{(n)}(a+(x-a)\theta(x))=(B+\xi_{4})\varphi((x-a)\theta(x)) \tag{17}$$

其中，$\xi_{3}\to 0,\xi_{4}\to 0(x\to a^{+})$. 把式⑭⑮⑯⑰代入式⑬，得

$$(B+\xi_{4})\varphi((x-a)\theta(x))(A/B)\left(\frac{B}{C_{n}^{(\varphi)}}\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j}C_{n}^{j}\left(1-\frac{j}{n}\right)^{n}\Omega(n,j)+\xi_{2}\right)(x-a)^{n}\varphi(x)+$$
$$(B+\xi_{4})\varphi((x-a)\theta(x))\left(\frac{D}{C_{n}^{(\delta)}}\left(\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j}C_{n}^{j}\left(1-\frac{j}{n}\right)^{n}\Delta(n,j)\right)+\xi_{1}\right)(x-a)^{n}\delta(x)=$$
$$\left(\frac{B}{C_{n}^{(\varphi)}}\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j}C_{n}^{j}\left(1-\frac{j}{n}\right)^{n}\Omega(n,j)+\xi_{2}\right)(x-a)^{n}\varphi(x)\cdot$$
$$[(A/B)(B+\xi_{4})\varphi((x-a)\theta(x))+(D+\xi_{3})\delta((x-a)\theta(x))]$$

整理得

$$(B+\xi_{4})\varphi((x-a)\theta(x))\left(\frac{D}{C_{n}^{(\delta)}}\left(\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j}C_{n}^{j}\left(1-\frac{j}{n}\right)^{n}\Delta(n,j)\right)+\xi_{1}\right)(x-a)^{n}\delta(x)=$$

$$\left(\frac{B}{C_n^{(\varphi)}}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j C_n^j\left(1-\frac{j}{n}\right)^n\Omega(n,j)+\xi_2\right)(x-a)^n\varphi(x)\cdot(D+\xi_3)\delta((x-a)\theta(x))$$

进而可得

$$\frac{(B+\xi_4)\left(\frac{D}{C_n^{(\delta)}}\left(\sum_{j=0}^{n}(-1)^j C_n^j\left(1-\frac{j}{n}\right)^n\Delta(n,j)\right)+\xi_1\right)}{\left(\frac{B}{C_n^{(\varphi)}}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j C_n^j\left(1-\frac{j}{n}\right)^n\Omega(n,j)+\xi_2\right)\cdot(D+\xi_3)}=\frac{\delta((x-a)\theta(x))\varphi(x)}{\varphi((x-a)\theta(x))\delta(x)} \tag{18}$$

注意到,$\xi_1\to 0,\xi_2\to 0,\xi_3\to 0,\xi_4\to 0(x\to a^+)$,由式⑱可推出

$$\lim_{x\to a^+}\frac{\delta((x-a)\theta(x))\varphi(x)}{\varphi((x-a)\theta(x))\delta(x)}=\frac{C_n^{(\varphi)}\left(\sum_{j=0}^{n}(-1)^j C_n^j\left(1-\frac{j}{n}\right)^n\Delta(n,j)\right)}{C_n^{(\delta)}\left(\sum_{j=0}^{n}(-1)^j C_n^j\left(1-\frac{j}{n}\right)^n\Omega(n,j)\right)}$$

定理3 证毕.

在定理2 中,令 $\varphi(x)=(x-a)^{\alpha},\Psi(x)=(x-a)^{\beta}$,则

$$\Upsilon(n,j)=\lim_{x\to a^+}\frac{\varphi[x-j(x-a)/n]}{\varphi(x)}=\left(1-\frac{j}{n}\right)^{\alpha}$$

$$\Omega(n,j)=\lim_{x\to a^+}\frac{\Psi[x-j(x-a)/n]}{\Psi(x)}=\left(1-\frac{j}{n}\right)^{\beta}$$

并应用引理1 可得定理4.

定理4[13] 设 I 是 R 上的一个区间,$a\in I$ 是区间 I 的左端点,函数 $f,g:I\to R$ 满足下列条件:

i) 函数 f 与 g 在区间 I 上有 n 阶导数且 $g^{(n)}(x)\neq 0$;

ii) $\lim\limits_{x\to a^+}f^{(n)}(x)/(x-a)^{\alpha}=A,\lim\limits_{x\to a^+}g^{(n)}(x)/(x-a)^{\beta}=B$;

iii) $\dfrac{Bf^{(n)}(a)\Gamma(\beta+1)}{n^{n+\beta}\Gamma(n+\beta+1)}\sum\limits_{j=0}^{n}(-1)^j C_n^j(n-j)^{n+\beta}\neq\dfrac{Ag^{(n)}(a)\Gamma(\alpha+1)}{n^{n+\alpha}\Gamma(n+\alpha+1)}\sum\limits_{j=0}^{n}(-1)^j C_n^j(n-j)^{n+\alpha}$.

其中,A,B 是非零常数;α,β 是实数,$\alpha>-1,\beta>-1$ 且 $\alpha\neq\beta$. 则下列结论成立:

1° 存在实数 $\delta>0$,使 $(a,a+\delta)\subseteq I$,且 $\forall x\in(a,a+\delta)$,有 $f^{(n)}(x)\tilde{g}(x)\neq\tilde{f}(x)g^{(n)}(x)$,其中

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases}\dfrac{\sum\limits_{j=0}^{n}(-1)^j C_n^j f[x-j(x-a)/n]}{(x-a)^{n+\alpha}} & x\in(a,a+\delta)\\[2ex] \dfrac{A\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)}\sum\limits_{j=0}^{n}(-1)^j C_n^j\left(1-\dfrac{j}{n}\right)^{n+\alpha} & x=a\end{cases}$$

$$\tilde{g}(x)=\begin{cases}\dfrac{\sum\limits_{j=0}^{n}(-1)^j C_n^j g[x-j(x-a)/n]}{(x-a)^{n+\beta}} & x\in(a,a+\delta)\\[2ex] \dfrac{B\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n+\beta+1)}\sum\limits_{j=0}^{n}(-1)^j C_n^j\left(1-\dfrac{j}{n}\right)^{n+\beta} & x=a\end{cases}$$

2° 若再设 $\forall x\in(a,a+\delta),(f^{(n)}(x)/g^{(n)}(x))'\neq 0$,则对 $\forall x\in(a,a+\delta)$,存在唯一函数 $c:(a,a+\delta)\to(a,a+\delta)$,使

$$\frac{\sum_{j=0}^{n}(-1)^j C_n^j f[x-j(x-a)/n]}{\sum_{j=0}^{n}(-1)^j C_n^j g[x-j(x-a)/n]}=\frac{f^{(n)}(c(x))}{g^{(n)}(c(x))}$$

3° 函数 $\theta:(a,a+\delta)\to(0,1)$ 定义为

$$\theta(x)=\frac{c(x)-a}{x-a}\qquad x\in(a,a+\delta)$$

且有下列性质：

a) 对 $\forall x\in(a,a+\delta)$，有

$$\frac{\sum_{j=0}^{n}(-1)^j C_n^j f[x-j(x-a)/n]}{\sum_{j=0}^{n}(-1)^j C_n^j g[x-j(x-a)/n]}=\frac{f^{(n)}(a+(x-a)\theta(x))}{g^{(n)}(a+(x-a)\theta(x))}$$

b) 有渐近估计式

$$\lim_{x\to a^+}\theta(x)=\frac{1}{n}\left(\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)\sum_{j=0}^{n}(-1)^j C_n^j(n-j)^{n+\alpha}}{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(\beta+1)\sum_{j=0}^{n}(-1)^j C_n^j(n-j)^{n+\beta}}\right)^{\frac{1}{\alpha-\beta}}$$

4° 函数 $\bar{c}:[a,a+\delta)\to[a,a+\delta)$ 定义为 $\bar{c}(x)=\begin{cases}c(x) & x\in(a,a+\delta)\\ a & x=a\end{cases}$，在 $x=a$ 可微且

$$\bar{c}^{(1)}(a)=\frac{1}{n}\left(\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)\sum_{j=0}^{n}(-1)^j C_n^j(n-j)^{n+\alpha}}{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(\beta+1)\sum_{j=0}^{n}(-1)^j C_n^j(n-j)^{n+\beta}}\right)^{\frac{1}{\alpha-\beta}}$$

如果 $\alpha=\beta$，则定理 4 不再成立，但在定理 3 中令 $\delta(x)=(x-a)^\gamma$，则

$$\Delta(n,j)=\lim_{x\to a^+}\frac{\delta[x-j(x-a)/n]}{\delta(x)}=\left(1-\frac{j}{n}\right)^\gamma$$

并应用引理 1 可得定理 5.

定理 5[13]　在定理 4 的条件下，若 $\alpha=\beta$，假设

$$\lim_{x\to a^+}[f^{(n)}(x)-(A/B)g^{(n)}(x)]/(x-a)^\gamma=D$$

其中，D 是非零常数，γ 是实数 $\gamma>-1$，则下列结论成立：

1° 存在实数 $\delta>0$，使 $(a,a+\delta)\subseteq I$，且 $\forall x\in(a,a+\delta)$，有 $\tilde{f}(x)g^{(n)}(x)\neq 0$，其中

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases}\dfrac{\sum_{j=0}^{n}(-1)^j C_n^j f[x-j(x-a)/n]-(A/B)\sum_{j=0}^{n}(-1)^j C_n^j g[x-j(x-a)/n]}{(x-a)^{n+\gamma}} & x\in(a,a+\delta)\\[2ex] \dfrac{D\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(n+\gamma+1)}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j C_n^j\left(1-\dfrac{j}{n}\right)^{n+\gamma} & x=a\end{cases}$$

2° 若再设 $\forall x\in(a,a+\delta)$，$(f^{(n)}(x)/g^{(n)}(x))'\neq 0$，则对 $\forall x\in(a,a+\delta)$，存在唯一函数 $c:(a,a+\delta)\to(a,a+\delta)$，使

$$\frac{\sum_{j=0}^{n}(-1)^j C_n^j f[x-j(x-a)/n]}{\sum_{j=0}^{n}(-1)^j C_n^j g[x-j(x-a)/n]}=\frac{f^{(n)}(c(x))}{g^{(n)}(c(x))}$$

3° 函数 $\theta:(a,a+\delta)\to(0,1)$ 定义为

$$\theta(x)=\frac{c(x)-a}{x-a}\qquad x\in(a,a+\delta)$$

且有下列性质:

a) 对 $\forall x\in(a,a+\delta)$,有

$$\frac{\sum_{j=0}^{n}(-1)^j C_n^j f[x-j(x-a)/n]}{\sum_{j=0}^{n}(-1)^j C_n^j g[x-j(x-a)/n]}=\frac{f^{(n)}(a+(x-a)\theta(x))}{g^{(n)}(a+(x-a)\theta(x))}$$

b) 有渐近估计式

$$\lim_{x\to a^+}\theta(x)=\frac{1}{n}\left(\frac{\Gamma(\gamma+1)\Gamma(n+\alpha+1)\sum_{j=0}^{n}(-1)^j C_n^j(n-j)^{n+\gamma}}{\Gamma(n+\gamma+1)\Gamma(\alpha+1)\sum_{j=0}^{n}(-1)^j C_n^j(n-j)^{n+\alpha}}\right)^{\frac{1}{\gamma-\alpha}}$$

4° 函数 $\bar{c}:[a,a+\delta)\to[a,a+\delta)$ 定义为 $\bar{c}(x)=\begin{cases}c(x) & x\in(a,a+\delta)\\ a & x=a\end{cases}$,在 $x=a$ 可微且

$$\bar{c}^{(1)}(a)=\frac{1}{n}\left(\frac{\Gamma(\gamma+1)\Gamma(n+\alpha+1)\sum_{j=0}^{n}(-1)^j C_n^j(n-j)^{n+\gamma}}{\Gamma(n+\gamma+1)\Gamma(\alpha+1)\sum_{j=0}^{n}(-1)^j C_n^j(n-j)^{n+\alpha}}\right)^{\frac{1}{\gamma-\alpha}}$$

注 1　取 $n=1$, 便得通常的 Cauchy 中值定理中间点函数的渐近性和一阶可微性.

3　结语

本文利用比较函数概念研究了高阶 Cauchy 中值定理中间点函数的渐近性,建立了该中值定理中间点函数更广泛的渐近估计式,据此还获得了高阶 Cauchy 中值定理中间点函数的一阶可微性. 本文结果与相关文献一起利用比较函数的概念解决了高阶 Cauchy 中值定理、广义泰勒中值定理和积分中值定理中间点函数的渐近性和一阶可微性问题, 丰富了数学分析中的中值定理理论.

参考文献:

[1] AZPEITJA A G. On the Lagrange remainder of the Taylor formula[J]. Amer Math Monthly,1982,89(5):311.

[2] JACOBSON B. On the mean value theorem for integrals[J]. Amer Math Monthly,1982,89(5):300.

[3] DUCA D I,POP O. On the intermediate point in Cauchy's mean-value theorem[J]. Math Inequal Appl,2006,9:375.

[4] 张树义. 广义 Taylor 公式"中间点"一个更广泛的渐近估计式[J]. 数学的实践与认识,2004,34(11):173.

[5] 张树义. 积分中值定理"中间点"更广泛的渐近估计式[J]. 南阳师范学院学报,2005(3):15.

[6] 万美玲,张树义. 二元函数 Taylor 公式"中间点"的渐近估计式[J]. 鲁东大学学报(自然科学版),2016,32(2):1.

[7] 张树义. 关于中值定理"中间点"渐近性的若干注记[J]. 烟台师范学院学报(自然科学版),1994,10(2):105.

[8] 张树义,赵美娜,郑晓迪. 积分中值定理中间点的渐近估计式[J]. 北华大学学报(自然科学版),2016,17(4):448.

[9] POWERS R C,RIEDEL T,SAHOO P K. Limit properties of differential mean values[J]. J Math Anal Appl,1998,227: 216.

[10] 张树义. 关于"中间点"渐近性的两个结果[J]. 辽宁师范大学学报(自然科学版),1995,18(2): 109.

[11] 李元中,冯汉桥. 关于高阶 Lagrange 中值定理"中间点"的渐近性[J]. 数学杂志,1991,11(3): 298.

[12] 张树义,丛培根,郑晓迪. 高阶 Cauchy 中值定理中间点函数的性质[J]. 北华大学学报(自然科学版),2017,18(1):19.

[13] 丛培根,张树义. 关于高阶 Cauchy 中值定理中间点函数可微性的进一步研究[J]. 南通大学学报(自然科学版),2018,17(1):90.

[14] 李丹,张树义,郑晓迪. Cauchy 中值定理"中间点函数"的一个注记[J]. 南阳师范学院学报(自然科学版),2016,15 (12): 5.

[15] 张树义,林媛,郑晓迪. 广义中值定理中间点函数的性质[J]. 北华大学学报(自然科学版),2016,17(6):714.

[16] 刘冬红,张树义,郑晓迪. 二元函数柯西中值定理"中间点"的渐近估计式[J]. 井冈山大学学报(自然科学版),2017,38(4):13.

[17] 李丹,张树义. 关于泰勒公式中间点函数的可微性[J]. 井冈山大学学报(自然科学版),2016,37(6):11.

[18] 刘冬红,张树义,丛培根. 积分中值定理中间点函数的性质[J]. 北华大学学报(自然科学版),2017,18(4): 434.

[19] 赵美娜,张树义,郑晓迪. 广义 Taylor 中值定理"中间点函数"的性质[J]. 南通大学学报(自然科学版),2016,15(3): 80.

[20] 赵美娜,张树义,郑晓迪. 泰勒公式"中间点函数"的一个注记[J]. 鲁东大学学报(自然科学版),2016,32(4): 302.

[21] 伍建华,孙霞林,熊德之. 一类积分型中值定理的渐近性讨论[J]. 西南师范大学学报,2012,37(8):24.