第26卷 第1期
2011年2月
郑州轻工业学院学报(自然科学版)
JOURNAL OF ZHENGZHOU UNIVERSITY OF LIGHT INDUSTRY(Natural Science)
Vol. 26 No. 1
Feb. 2011

文章编号:1004-1478(2011)01-0116-03

广义严格对角占优矩阵的判定方法

田素霞

(商丘师范学院 计算机科学系, 河南 商丘 476000)

摘要:基于对角占优矩阵和α-对角占优矩阵的概念,给出了广义严格对角占优矩阵的新的判定方法,推广并改进了文献已有的结果.

关键词:对角占优矩阵;广义对角占优矩阵;判定条件
中图分类号:O151.21　　文献标志码:A

Criteria of the generalized strictly diagonally dominant matrices

TIAN Su-xia

(*Dept. of Comp. Sci., Shangqiu Teachers College, Shangqiu* 476000, *China*)

Abstract: The concepts of generalized diagonal dominant matrix and α-diagonal dominant matrix were introduced, and give the new criteria conditions for a matrix to be a generalized strictly diagonal dominant matrix were given. Thus the corresponding results were generalized and improved.

Key words: diagonal dominant matrix; generalized diagonal dominant matrix; criteria condition

0 引言

广义对角占优矩阵是计算数学和矩阵理论研究的重要课题之一,在控制理论中有相当广泛的应用.文献[1-5]给出了判定广义对角占优矩阵的充分条件,本文拟利用α-对角占优矩阵给出广义对角占优矩阵新的判定方法,以推广并改进已有的结果.

1 预备知识

设$A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$为$n$阶复方阵,$N=\{1,2,\cdots,n\}$,$N_1,N_2$为$N$的划分,$\alpha_i(A)=\sum\limits_{j\neq i}^{j\in N_1}|a_{ij}|$,$\beta_i(A)=\sum\limits_{j\neq i}^{j\in N_2}|a_{ij}|$,$\Lambda_i(A)=\sum\limits_{j\neq i}^{j\in N}|a_{ij}|=\alpha_i+\beta_i$,$S_i(A)=\sum\limits_{j\neq i}^{j\in N}|a_{ji}|$,在不引起混淆的情况下,简记为$\alpha_i,\beta_i,\Lambda_i$和$S_i$,$\sigma_i(A)=\dfrac{\Lambda_i\cdot S_i^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}{|a_{ii}|^{\frac{1}{\alpha}}}$,$i\in N\cdots$

定义1 设$A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$,若$|a_{ii}|>\Lambda_i(A)(\forall i\in N)$,则称$A$为严格对角占优矩阵;若存在正对角矩

收稿日期:2010-11-04
基金项目:河南省自然科学基金项目(072300410370)
作者简介:田素霞(1965—),女,河南省夏邑县人,商丘师范学院教授,主要研究方向为矩阵论.

阵 X 使得 AX 为严格对角占优矩阵,则称 A 为广义严格对角占优矩阵.

定义2 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$,若存在 $\alpha\in(0,1]$ 使 $|a_{ii}|>\Lambda_i^{\alpha}S_i^{1-\alpha}(\ \forall i\in N)$,则称 A 为严格 α-对角占优矩阵;若存在正对角矩阵 X 使得 AX 为严格 α-对角占优矩阵,则称 A 为广义严格 α-对角占优矩阵.

2 主要结果

引理1[6] 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$,若 A 为严格 α-对角占优矩阵,则 A 为广义严格对角占优矩阵.

定理1 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$,若存在 $N_1\cup N_2=N,N_1\cap N_2=\emptyset$ 及 $\alpha\in(0,1]$,使下列条件得以满足:

1) $|a_{jj}|>\Lambda_j^{\alpha}S_j^{1-\alpha},\forall j\in N_2$;

2) $(|a_{ii}|^{\frac{1}{\alpha}}-\alpha_iS_i^{\frac{1-\alpha}{\alpha}})(|a_{jj}|^{\frac{1}{\alpha}}-\beta_jS_j^{\frac{1-\alpha}{\alpha}})>\alpha_jS_j^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\cdot\beta_iS_i^{\frac{1-\alpha}{\alpha}},\forall i\in N_1,j\in N_2$.

则 A 为广义严格对角占优矩阵.

证明 令 $M_i=\dfrac{|a_{ii}|^{\frac{1}{\alpha}}-\alpha_i\cdot S_i^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}{\beta_i\cdot S_i^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}},i\in N_1$. 当 $\beta_iS_i^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}=0$ 时,记 $M_i=+\infty$. 有

$$m_j=\frac{\alpha_j\cdot S_j^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}{|a_{jj}|^{\frac{1}{\alpha}}-\beta_j\cdot S_j^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}$$

由题设知 $M_i>m_j\geqslant0,\forall i\in N_1,j\in N_2$. 所以存在 $d>0$,使 $0\leqslant\max\limits_{j\in N_2}m_j<d<\min\limits_{i\in N_1}M_i\leqslant+\infty$.

设正对角矩阵 $X=\mathrm{diag}(x_i\mid x_i=1,i\in N_1;x_i=d,i\in N_2)$,再设 $B=AX=(b_{ij})$,则当 $i\in N_1$ 时,有

$$|b_{ii}|^{\frac{1}{\alpha}}-\Lambda_i(B)S_i^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}(B)=|a_{ii}|^{\frac{1}{\alpha}}-(\alpha_i+\beta_id)S_i^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}=(|a_{ii}|^{\frac{1}{\alpha}}-\alpha_iS_i^{\frac{1-\alpha}{\alpha}})-\beta_idS_i^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}>0$$

所以 $|b_{ii}|^{\frac{1}{\alpha}}>\Lambda_i(B)S_i^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}(B)$,即 $|b_{ii}|>\Lambda_i^{\alpha}(B)S_i^{1-\alpha}(B)$.

当 $j\in N_2$ 时,有

$$|b_{jj}|^{\frac{1}{\alpha}}-\Lambda_j(B)S_j^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}(B)=|a_{jj}|^{\frac{1}{\alpha}}d^{\frac{1}{\alpha}}-(\alpha_j+\beta_jd)S_j^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}d^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}=d^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}[d(|a_{jj}|^{\frac{1}{\alpha}}-\beta_jS_j^{\frac{1-\alpha}{\alpha}})-\alpha_jS_j^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}]>0$$

所以 $|b_{jj}|^{\frac{1}{\alpha}}>\Lambda_j(B)S_j^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}(B)$,即 $|b_{jj}|>\Lambda_j^{\alpha}(B)S_j^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}(B)$.

可见,对 $\forall i\in N$,有 $|b_{ii}|>\Lambda_i^{\alpha}(B)S_i^{1-\alpha}(B)$,所以 B 为严格 α-对角占优矩阵. 由引理1可知,B 为广义严格对角占优矩阵,又因为 X 为正对角矩阵,所以 A 也是广义严格对角占优矩阵.

定理2 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$,若存在 $N_1\cup N_2=N,N_1\cap N_2=\emptyset$ 及 $\alpha\in(0,1]$,使下列条件得以满足:

1) $|a_{jj}|>\Lambda_j^{\alpha}S_j^{1-\alpha},\forall j\in N_2$;

2) $\left(|a_{ii}|^{\frac{1}{\alpha}}-\sum\limits_{j\in N_1}^{j\neq i}|a_{ij}|\cdot S_i^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\right)\left(|a_{jj}|^{\frac{1}{\alpha}}-\sum\limits_{t\in N_2}^{t\neq j}|a_{jt}|\cdot S_j^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\right)>\sum\limits_{j\in N_2}^{j\neq i}|a_{ij}|\sigma_i\cdot S_j^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\cdot\sum\limits_{t\in N_1}^{t\neq j}|a_{jt}|\sigma_j\cdot S_i^{\frac{1-\alpha}{\alpha}},\forall i\in N_1,$ $j\in N_2$.

则 A 为广义严格对角占优矩阵.

证明 令 $M_i=\dfrac{|a_{ii}|^{\frac{1}{\alpha}}-\sum\limits_{j\in N_1}^{j\neq i}|a_{ij}|\cdot S_i^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}{\sum\limits_{j\in N_2}^{j\neq i}|a_{ij}|\cdot\sigma_i\cdot S_i^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}},i\in N_1$. 则 $M_i>0,\forall i\in N_1$. 当 $\sum\limits_{j\in N_2}^{j\neq i}|a_{ij}|\cdot\sigma_i\cdot S_j^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}=0$ 时,记 $M_i=+\infty$. 有

$$m_j=\frac{\sum\limits_{t\in N_1}^{t\neq j}|a_{jt}|\cdot\sigma_j\cdot S_j^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}{|a_{jj}|^{\frac{1}{\alpha}}-\sum\limits_{t\in N_2}^{t\neq j}|a_{jt}|\cdot S_j^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}},\quad j\in N_2$$

由题设知 $M_i > m_j \geqslant 0, \forall i \in N_1, j \in N_2$. 所以存在 $d > 0$ 使 $0 \leqslant \max\limits_{j \in N_2} m_j < d < \min\limits_{i \in N_1} M_i \leqslant +\infty$.

设正对角矩阵 $X = \mathrm{diag}(x_i \mid x_i = \sigma_i, i \in N_1; x_i = d, i \in N_2)$，再设 $B = AX = (b_{ij})$，则当 $i \in N_1$ 时，有

$$|b_{ii}|^{\frac{1}{\alpha}} - \Lambda_i(B) S_i^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}(B) = \sigma_i^{\frac{1}{\alpha}} |a_{ii}|^{\frac{1}{\alpha}} - \Big[\sum_{j \in N_1}^{j \neq i} |a_{ij}| \cdot \sigma_i + \sum_{j \in N_2}^{j \neq i} |a_{ij}| d\Big] \cdot \sigma_i^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} S_i^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} =$$

$$\sigma_i^{\frac{1}{\alpha}} \Big[\Big(|a_{ii}|^{\frac{1}{\alpha}} - \sum_{j \in N_1}^{j \neq i} |a_{ij}| \cdot S_i^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\Big) - \sum_{j \in N_2}^{j \neq i} |a_{ij}| \sigma_i \cdot S_i^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} d\Big] > 0$$

所以 $|b_{ii}|^{\frac{1}{\alpha}} > \Lambda_i(B) S_i^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}(B)$，即 $|b_{jj}| > \Lambda_i^{\alpha}(B) S_j^{1-\alpha}(B)$.

当 $j \in N_2$ 时，有

$$|b_{jj}|^{\frac{1}{\alpha}} - \Lambda_j(B) S_j^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}(B) = |a_{jj}|^{\frac{1}{\alpha}} d^{\frac{1}{\alpha}} - \Big[\sum_{t \in N_1}^{t \neq j} |a_{jt}| \sigma_j + \sum_{t \in N_2}^{t \neq j} |a_{jt}| d\Big] \cdot S_j^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} d^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} =$$

$$d^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \Big[d\Big(|a_{jj}|^{\frac{1}{\alpha}} - \sum_{t \in N_2}^{t \neq j} |a_{jt}| S_j^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\Big) - \sum_{j \in N_1}^{j \neq i} |a_{ij}| \sigma_j \cdot S_j^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\Big)\Big] > 0$$

所以 $|b_{jj}|^{\frac{1}{\alpha}} > \Lambda_j(B) S_j^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}(B)$，即 $|b_{jj}| > \Lambda_j^{\alpha}(B) S_j^{1-\alpha}(B)$.

所以 B 为严格 α－对角占优矩阵，由引理 1 可知，B 为广义严格对角占优矩阵，又因为 X 为正对角矩阵，所以 A 也是广义严格对角占优矩阵.

参考文献:

[1] 孙玉祥. 广义对角占优矩阵的充分条件[J]. 高等学校计算数学学报, 1997(3): 216.

[2] 王广彬, 洪振杰. 非奇异 H 矩阵的充分条件[J]. 高等学校计算数学学报, 2003(2): 184.

[3] 田素霞. 广义对角占优矩阵的判定准则[J]. 数学季刊, 2007(1): 63.

[4] 田素霞. 广义严格对角占优矩阵的充分条件[J]. 数学季刊, 2008(3): 397.

[5] 马玉洁. 对角占优矩阵和块对角占优矩阵的判定[J]. 郑州轻工业学院学报: 自然科学版, 2010, 25(5): 109.

[6] 田素霞. 对角占优矩阵[M]. 北京: 中国农业科学技术出版社, 2007.