

# 2个非线性耦合复杂动态网络的广义同步

毛北行, 常娟

(郑州航空工业管理学院 数理系, 河南 郑州 450015)

**摘要:**研究了2个具有不同节点和不同拓扑结构的非线性耦合复杂动态网络的广义同步问题,基于驱动-响应同步策略,对其中1个网络施加控制,利用稳定性理论得到了相应的广义同步判据.数值算例表明,所得结果可以用于供应链网络、能源供求网络、交通网络等.

**关键词:**非线性耦合;复杂动态网络;广义同步

**中图分类号:** O482.4    **文献标志码:** A    **DOI:** 10.3969/j.issn.2095-476X.2014.05.023

## Generalized synchronization of two complex dynamical networks with nonlinear coupling

MAO Bei-xing, CHANG Juan

(Department of Mathematics and Physics, Zhengzhou Institute of Aeronautical Industry Management, Zhengzhou 450015, China)

**Abstract:** The problem of generalized synchronization between two networks with different nodes and different topological structures was investigated. Based on the drive-response strategy, one of the networks was controlled, and the synchronization criterion was given via stability theory. The numerical example could be applied to supply chain network, energy supply and demand network, traffic network and so on.

**Key words:** nonlinear coupling; complex dynamical network; generalized synchronization

## 0 引言

驱动-响应同步方法提出后,混沌控制与混沌同步及其应用渐成研究热点并取得了丰硕成果<sup>[1-6]</sup>.自然界和人类社会存在着各种各样的复杂网络,自从著名的随机图模型被提出后,复杂网络引起了人们的高度关注,对复杂网络的研究已经渗透到物理、生物、计算机科学、医学、控制科学及保密通信等领域.著名的复杂网络模型包括随机图、小世界网络、无标度网络及广义复杂动力学模型等.李建芬等<sup>[7]</sup>研究了一类混沌系统的修正函数投影同步问题,方洁等<sup>[8]</sup>研究了耦合混沌系统的自适应修正函数投影同步问题,徐君群等<sup>[9]</sup>研究了2个

时滞复杂网络的广义同步问题.上述文献均未讨论非线性耦合的广义同步问题,而具有非线性耦合的复杂网络却大量存在.本文拟研究2个不同节点和不同拓扑结构的非线性耦合复杂动态网络的广义同步问题,基于驱动-响应同步策略,对其中1个网络施加控制,利用稳定性理论得到相应的广义同步判据.

## 1 主要结果

考虑如下具有非线性耦合复杂动态网络

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = f(\mathbf{x}_i(t)) + \sum_{j=1}^N c_{ij} \Gamma_1 h_1(\mathbf{x}_j(t))$$

**收稿日期:** 2014-07-13

**基金项目:** 国家自然科学基金数学天元基金项目(11226337);航空基金项目(2013ZD55006);河南省高等学校青年骨干教师资助计划项目(2013GGJS-142)

**作者简介:** 毛北行(1976—),男,河南省洛阳市人,郑州航空工业管理学院副教授,主要研究方向为复杂网络与混沌同步.

$$i = 1, 2, \dots, N \quad \text{①}$$

其中,  $\mathbf{x}_i(t)$  为状态向量;  $f(\mathbf{x}_i(t)), h_1(\mathbf{x}_j(t))$  为光滑的向量值函数;  $\mathbf{\Gamma}_1$  为内部耦合矩阵;  $c_{ij}$  为耦合结构矩阵  $\mathbf{C}$  的元素,  $\mathbf{C} = (c_{ij})_{N \times N} \in R^{N \times N}$ , 若节点  $i$  到节点  $j(j \neq i)$  有连接, 则  $c_{ij} > 0$ , 否则  $c_{ij} = 0, c_{ii} = -\sum_{j=1, j \neq i}^N c_{ij}$ . 以系统 ① 作为驱动系统, 设计响应系统

$$\dot{\mathbf{y}}_i(t) = g(\mathbf{y}_i(t)) + \sum_{j=1}^N d_{ij} \mathbf{\Gamma}_2 h_2(\mathbf{y}_j(t)) + u_i(t) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad \text{②}$$

其中,  $\mathbf{y}_i(t)$  为状态向量;  $g(\mathbf{y}_i(t)), h_2(\mathbf{y}_j(t))$  为光滑的向量值函数;  $\mathbf{\Gamma}_2$  为内部耦合矩阵;  $d_{ij}$  为耦合结构矩阵  $\mathbf{D}$  的元素,  $\mathbf{D} = (d_{ij})_{N \times N} \in R^{N \times N}$ , 若节点  $i$  到节点  $j(j \neq i)$  有连接, 则  $d_{ij} > 0$ , 否则  $d_{ij} = 0, d_{ii} = -\sum_{j=1, j \neq i}^N d_{ij}$ .

**假设 1** 函数  $g(\cdot)$  是全局 Lipschitz 连续的, 即  $\|g(z_1) - g(z_2)\| \leq l_i \|z_1 - z_2\|$ .

**假设 2** 函数  $h_2(\cdot)$  是全局 Lipschitz 连续的, 即  $\|h_2(z_1) - h_2(z_2)\| \leq \tilde{l}_i \|z_1 - z_2\|$ .

**定义 1** 设  $\Phi_i : R^n \rightarrow R^m, i = 1, 2, \dots, N$  是连续可微的映射, 若  $\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \|\mathbf{y}_i(t) - \Phi_i(\mathbf{x}_i(t))\| = 0$ , 则称 ① 与 ② 实现了广义同步.

**定理 1** 设计如下的控制律, 可以实现 ① 与 ② 广义同步.

$$u_i(t) = \mathbf{D}\Phi_i(\mathbf{x}_i) \cdot f(\mathbf{x}_i(t)) - ke_i(t) - g(\Phi_i(\mathbf{x}_i)) - \sum_{j=1}^N d_{ij} \mathbf{\Gamma}_2 h_2(\Phi_i(\mathbf{x}_j(t))) + \mathbf{D}\Phi_i(\mathbf{x}_i(t)) \cdot \sum_{j=1}^N c_{ij} \mathbf{\Gamma}_1 h_1(\mathbf{x}_j(t)) \quad \text{③}$$

其中,  $\mathbf{D}\Phi_i(\mathbf{x}_i(t))$  为映射  $\Phi_i(\mathbf{x}_i)$  的雅可比矩阵, 定义系统误差  $e_i(t) = \mathbf{y}_i(t) - \Phi_i(\mathbf{x}_i(t)), k$  为反馈增益系数.

**证明** 在控制器 ③ 的作用下, ① 与 ② 之间的误差系统可以表示为

$$\dot{e}_i(t) = \dot{\mathbf{y}}_i(t) - \mathbf{D}\Phi_i(\mathbf{x}_i) \dot{\mathbf{x}}_i(t) = g(\mathbf{y}_i(t)) - g(\Phi_i(\mathbf{x}_i(t))) - ke_i(t) + \sum_{j=1}^N d_{ij} \mathbf{\Gamma}_2 [h_2(\mathbf{y}_j(t)) - h_2(\Phi_j(\mathbf{x}_j(t)))]$$

构造 Lyapunov 函数  $V(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N e_i^T(t) e_i(t)$ ,

则其导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \sum_{i=1}^N e_i^T(t) \dot{e}_i^T(t) = \\ &\sum_{i=1}^N e_i(t) [g(\mathbf{y}_i) - g(\Phi_i(\mathbf{x}_i)) - ke_i + \\ &\sum_{j=1}^N d_{ij} \mathbf{\Gamma}_2 (h_2(\mathbf{y}_j) - h_2(\Phi_j(\mathbf{x}_j)))] \leq \\ &\sum_{i=1}^N (l_i - k) e_i^T e_i + \sum_{i=1}^N e_i^T \sum_{j=1}^N d_{ij} \mathbf{\Gamma}_2 \tilde{l}_j e_j \leq \\ &\left(-k + \max\{l_i\} + \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2}\right) e^T e \end{aligned}$$

其中,  $e = (e_1^T, e_2^T, \dots, e_N^T)^T, \gamma = \lambda_{\max}\{(\mathbf{D} \otimes \mathbf{\Gamma}_2)^T \tilde{l}_j^T \tilde{l}_j (\mathbf{D} \otimes \mathbf{\Gamma}_2)\}$ .

令  $k^* = \max\{l_i\} + \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2}$ , 则当  $k > k^*$  时,  $\dot{V}(t) \leq -\eta e^T e \leq 0, \eta = k^* - k$  为非负常数. 那么  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^T(s) e(s) ds \leq -\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \dot{V}(s) ds = V(0) - \lim_{t \rightarrow \infty} V(t)$ , 从而  $e(t)$  平方可积, 由 Barbalat 引理很容易得到  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ , 即 ① 与 ② 实现了广义同步.

**推论 1** 如果 ① 与 ② 具有相同的拓扑结构与内部耦合矩阵, 则在如下控制器的作用下, ① 与 ② 可以实现完全同步.

$$u_i = f(\mathbf{x}_i) - g(\mathbf{x}_i) - ke_i + \sum_{j=1}^N c_{ij} \mathbf{\Gamma}_1 [h_1(\mathbf{x}_j) - h_2(\mathbf{x}_j)]$$

**推论 2** 如果 ① 与 ② 的对应节点有相同的动力学特性, 即  $f = g$ , 则设计如下控制器可以实现 ① 与 ② 完全同步.

$$u_i = -ke_i(t) + \sum_{j=1}^N c_{ij} \mathbf{\Gamma}_1 h_1(\mathbf{x}_j) - \sum_{j=1}^N d_{ij} \mathbf{\Gamma}_2 h_2(\mathbf{x}_j)$$

## 2 数值算例

以供应链网络为例, 假设生产商生产产品的状态方程为 Lü 系统, 动力学方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(-x_1 + x_2) + x_4 \\ \dot{x}_2 = bx_2 - x_1 x_3 \\ \dot{x}_3 = -cx_3 + x_1 x_2 \\ \dot{x}_4 = dx_4 + x_1 x_3 \end{cases} \quad \text{④}$$

其中,  $x_1$  表示该产品的产量,  $x_2$  表示该产品的质量,  $x_3$  表示该产品的价格,  $x_4$  表示该产品提供的服务, 则消费者关于该产品的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = (25\beta + 10)(y_2 - y_1) \\ \dot{y}_2 = (28 - 35\beta)y_1y_3 + (29\beta - 1)y_2 \\ \dot{y}_3 = y_1y_2 - \frac{\beta + 8}{3}y_3 \end{cases} \quad (5)$$

其中,  $y_1$  表示顾客对该产品的期望值,  $y_2$  表示顾客对该产品的满意度,  $y_3$  表示顾客对该产品的需求量,  $\beta \in [0, 1]$ . ④ 式中当  $a = 35, b = 20, c = 3, -0.46 < d \leq -0.35$  时, 系统出现 1 个混沌吸引子. 分别选取 ④ 为驱动系统、⑤ 为响应系统, 此时定理 1 的控制器相当于企业根据市场调查结果反馈制定生产决策, 即通过调查得到的  $x_i$  来调整其状态  $y_i$ , 假设消费者对该产品的期望值、满意度、需求量, 以及产品本身、产量、质量、价格和服务满足关系(即广义同步映射)

$$y_i = \varphi(x_i) = (2ix_{i1}, x_{i2} + 0.5x_{i4}, x_{i3} - i)$$

$$D\varphi(x_i) = \begin{bmatrix} 2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

设置初始值  $x_i(0) = (-0.1i, -0.2i, 0.3i, 0.4i)^T, y_i(0) = (0.2i, -0.3i, 0.4i)^T$ , 利用 Matlab 求解微分方程, 得到广义同步误差  $e(t)$  的变化曲线, 如图 1 所示. 由图 1 可知, 网络在耦合初期, 误差随时间演化的差异十分明显, 经过一个暂态过程后, 2 个网络中相对应的节点误差变量随时间演化趋于 0, 表明 2 个网络之间的混沌同步得以实现.

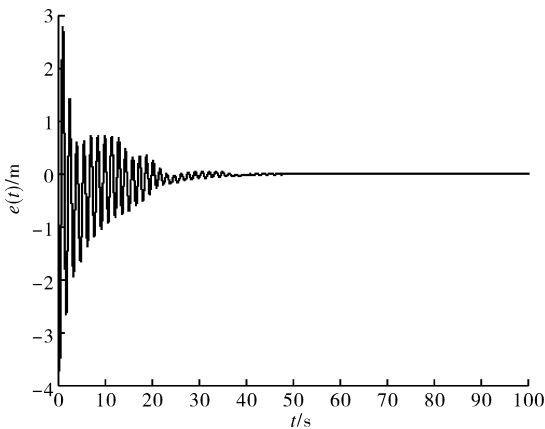


图 1 误差  $e(t)$  的时间响应曲线

### 3 结论

本文研究了 2 个非线性耦合复杂动态网络的广义同步问题, 基于 Lyapunov 稳定性理论, 得到了驱动系统与响应系统的广义同步的充分性条件, 并给出了特殊情形下结论成立的条件. 数值算例表明, 所得结果可以用于供应链网络、能源供求网络、交通网络等.

### 参考文献:

- [1] Yoo W J, Ji D H, Won S C. Synchronization of two different non-autonomous chaotic systems using fuzzy disturbance observer [J]. Physics Letters A, 2009, 374(11):1354.
- [2] Fallahi K, Leung H A. Chaos secure communication scheme based on multiplication modulation[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2010, 15(2):368.
- [3] 毛北行, 孟晓玲, 卜春霞. 一类模糊不确定时滞 Lurie 系统基于观测器的混沌同步问题[J]. 河南科学, 2013, 32(2):130.
- [4] 毛北行, 孟晓玲, 张理涛. 一类离散复杂网络混沌系统的输出耦合滑膜同步控制[J]. 郑州轻工业学院学报: 自然科学版, 2013, 28(2):103.
- [5] 毛北行, 程春蕊, 卜春霞. Lurie 混沌系统的修正函数投影同步[J]. 数学杂志, 2013, 33(4):717.
- [6] 吕翎, 李纲, 张檬. 等. 全局耦合网络的参数辨识与时空混沌同步[J]. 物理学报, 2011, 60(9):5051.
- [7] 李建芬, 李农. 一类混沌系统的修正函数投影同步[J]. 物理学报, 2011, 60(8):5071.
- [8] 方洁, 胡智宏, 江泳. 耦合混沌系统自适应修正函数投影同步[J]. 信息与控制, 2013, 42(1):39.
- [9] 徐君群, 张建雄, 庞明宝. 2 个时滞复杂动态网络的广义同步[J]. 天津大学学报: 自然科学与工程技术版, 2014, 47(1):81.