

# 可重复感染的肺结核传播模型

李春, 孙丽萍, 曲双红

(郑州轻工业学院 数学与信息科学学院, 河南 郑州 450002)

**摘要:**对于具有可接种且可重复感染的肺结核疾病,采用指数输入与标准发生率建立了传播模型,得到了无病平衡点,并研究了无病平衡点的局部以及全局稳定性.数值模拟验证了理论结果的正确性.

**关键词:**肺结核传播模型;无病平衡点;数值模拟;指数输入

**中图分类号:**0715.13;R521 **文献标志码:**A **DOI:**10.3969/j.issn.2095-476X.2014.05.024

## An epidemic model of tuberculosis repeated infection

LI Chun, SUN Li-ping, QU Shuang-hong

(College of Mathematic and Information Science, Zhengzhou University of Light Industry, Zhengzhou 450002, China)

**Abstract:** By index input and standard incidence rate, an epidemic model of tuberculosis repeated infection with inoculation disease was established. The disease-free equilibrium was obtained, and the disease-free equilibrium point of the local and global stability was studied. Numerical simulation results further verified the correctness of theoretical results.

**Key words:** epidemic model of tuberculosis; disease-free equilibrium point; numerical simulation; index input

## 0 引言

目前,许多疾病已经可以用疫苗防治,如肺结核传染病,但疫苗也有一定的失效率,且感染该疾病治愈后仍有可能再次感染.肺结核传染病是一种常见的具有可接种且可重复感染的疾病<sup>[1]</sup>.杨俊元等<sup>[2]</sup>在常数输入以及非线性发生率的情况下研究了具有重复感染性的传染病模型,并得出了疾病传播的无病平衡点及其稳定性,但考虑到人口的变化特征,指数输入更符合实际的人口变化规律. M. Y. Li等<sup>[3]</sup>建立了具有指数输入和饱和接触率的传染病模型,研究了平衡点的稳定性.李春等<sup>[4]</sup>建立了关于手足口病的SEIR连续传播模型.本文基于肺结核病的特点,采用指数输入与标准发生率建立传播模型,解出无病平衡点,通过研究无病平衡点的

稳定性得到疾病消亡的条件,数值模拟验证了理论结果的正确性.

## 1 动力学模型

本传播模型的建立基于如下假设与方法.

1) 将人群分为  $S$ (易感者类群体)、 $E$ (处于潜伏期群体)、 $I$ (染病者群体)、 $R$ (康复者类群体)、 $V$ (接种者群体) 5类,在  $t$  时刻易感者类群体人数为  $S(t)$ ,处于潜伏期群体人数为  $E(t)$ ,染病者群体人数为  $I(t)$ ,康复者类群体人数为  $R(t)$ ,接种者群体人数为  $V(t)$ ,人群总数  $N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + R(t) + V(t)$ .新生儿全部进入易感者类,不考虑因病死亡率,所有参数均  $\geq 0$ .

2) 采用标准发生率  $\beta SI/N$ ;

3) 采用指数输入  $bN$ ;

收稿日期:2014-06-16

基金项目:河南省基础与前沿技术研究计划项目(132300410169);河南省教育厅科学技术研究重点项目(13B110325)

作者简介:李春(1979—),男,河南省鹤壁市人,郑州轻工业学院讲师,硕士,主要研究方向为应用数学.

4) 参数说明:  $b$  为出生率系数;  $\mu$  为自然死亡率系数;  $\Psi$  表示易感者的接种疫苗率;  $\sigma$  表示经过接种后再次感染疾病的几率, 且  $0 \leq \sigma \leq 1$ ;  $\frac{1}{\gamma_1}, \frac{1}{\gamma_2}$  分别表示感染者和接种者的平均感染周期;  $\frac{1}{\gamma_3}$  表示康复者的平均康复周期. 根据仓室建模思想<sup>[4]</sup>, 可建立该疾病传播的动力学系统模型

$$\begin{cases} S' = bN - \mu S - \frac{\beta SI}{N} - \Psi S + \gamma_3 R \\ E' = \beta SI/N + \sigma \beta \frac{VI}{N} - \mu E - \gamma_1 E \\ I' = \gamma_1 E - (\gamma_2 + \mu) I \\ R' = \gamma_2 I - (\gamma_3 + \mu) R \\ V' = \Psi S - \mu V - \sigma \beta \frac{VI}{N} \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + R(t) + V(t)$ , 则  $N' = (b - \mu)N$ .

将①进行归一化处理, 令  $s = S/N, e = E/N, i = I/N, r = R/N, v = V/N$ , 可得其等价系统为

$$\begin{cases} s' = b - (b + \Psi)s - \beta si + \gamma_3 r \\ e' = \beta si + \sigma \beta vi - (b + \gamma_1)e \\ i' = \gamma_1 e - (\gamma_2 + b)i \\ r' = \gamma_2 i - (\gamma_3 + b)r \\ v' = \Psi s - bv - \sigma \beta vi \end{cases} \quad (2)$$

其中  $0 \leq s + e + i + r + v \leq 1$ , 则系统②的正向不变集为

$$D = \{(s, e, i, r, v) \mid 0 \leq s + e + i + r + v \leq 1\}$$

对系统②, 令

$$\begin{cases} b - (b + \Psi)s - \beta si + \gamma_3 r = 0 \\ \beta si + \sigma \beta vi - (b + \gamma_1)e = 0 \\ \gamma_1 e - (\gamma_2 + b)i = 0 \\ \gamma_2 i - (\gamma_3 + b)r = 0 \\ \Psi s - bv - \sigma \beta vi = 0 \end{cases}$$

可解得系统②的无病平衡点为

$$P_0 \left( \frac{b}{b + \Psi}, 0, 0, 0, \frac{\Psi}{b + \Psi} \right) \quad (3)$$

并定义基本再生数

$$R_0 = \frac{\beta \gamma_1 (b + \sigma \Psi)}{(\Psi + b)(\gamma_1 + b)(\gamma_2 + b)}$$

## 2 无病平衡点及其稳定性分析

**定理 1** 系统②总存在无病平衡点③, 且当  $R_0 < 1$  时,  $P_0$  是全局渐进稳定的.

**证明** 系统②的 Jacobian 矩阵为④, 则

$$J(P_0) = \begin{bmatrix} -(b + \Psi) & 0 & -\frac{b\beta}{b + \Psi} & \gamma_3 & 0 \\ 0 & -(b + \gamma_1) & \beta \frac{b + \sigma \Psi}{b + \Psi} & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & -(b + \gamma_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_2 & -(b + \gamma_3) & 0 \\ \Psi & 0 & -\frac{\sigma \beta \Psi}{b + \Psi} & 0 & -b \end{bmatrix}$$

$J(P_0)$  已有特征值  $-b$  和  $-(b + \Psi)$ , 考察矩阵

$$A = \begin{bmatrix} -(b + \gamma_1) & \beta \frac{b + \sigma \Psi}{b + \Psi} & 0 \\ \gamma_1 & -(b + \gamma_2) & 0 \\ 0 & \gamma_2 & -(b + \gamma_3) \end{bmatrix}$$

可得

$$\det A = -(b + \gamma_3) \left( (b + \gamma_1)(b + \gamma_2) - \beta \gamma_1 \frac{b + \sigma \Psi}{b + \Psi} \right)$$

因为  $\text{tr} A = -3b - \gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 < 0$ , 则当  $R_0 \leq 1$  时, 有  $\det A \leq 0$ , 则矩阵  $J(P_0)$  有 3 个负实部的特征值, 所以  $P_0$  局部渐进稳定<sup>[5]</sup>.

构造 Liapunov 函数  $L = e + \frac{b + \gamma_1}{\gamma_1} i$ , 则其沿②的

全导数为

$$\frac{dL}{dt} = \beta si + \sigma \beta vi - (b + \gamma_1)e +$$

$$\frac{b + \gamma_1}{\gamma_1} (\gamma_1 e - \gamma_2 i - bi)$$

上式化简为

$$J = \begin{bmatrix} -(b + \Psi) - \beta i & 0 & -\beta s & \gamma_3 & 0 \\ \beta i & -(b + \gamma_1) & \beta(s + \sigma v) & 0 & \sigma \beta i \\ 0 & \gamma_1 & -(b + \gamma_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_2 & -(b + \gamma_3) & 0 \\ \Psi & 0 & -\sigma \beta v & 0 & -b - \sigma \beta i \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\frac{dL}{dt} = i \frac{\beta(b + \sigma\Psi)}{b + \Psi} \left( \frac{b + \Psi}{b + \sigma\Psi} - \frac{1}{R_0} \right) \leq \frac{\beta(b + \sigma\Psi)}{b + \Psi} \left( 1 - \frac{1}{R_0} \right)$$

则当  $R_0 \leq 1$  时, 有  $L' \leq 0$ , 且  $L' = 0$  时, 有  $i = 0$ .

综上所述,  $\{L' = 0\} = \{i = 0\}$  其最大不变子集为  $M = \{i = 0\}$ , 则当  $t \rightarrow \infty$  时, 有  $i(t) \rightarrow 0$ , 且系统②的极限系统为

$$\begin{cases} s' = b - (b + \Psi)s + \gamma_3 r \\ e' = -(b + \gamma_1)e \\ i' = \gamma_1 e \\ r' = -(\gamma_3 + b)r \\ v' = \Psi s - bv \end{cases}$$

则当  $t \rightarrow \infty$  时, 有  $s(t) \rightarrow \frac{b}{\Psi + b}$ ,  $e(t) \rightarrow 0$ ,  $r(t) \rightarrow 0$ ,

$v(t) \rightarrow \frac{\Psi}{\Psi + b}$ , 则由 LaSalle 不变集<sup>[6]</sup>原理可知,  $P_0$  全局渐进稳定, 即基本再生数  $R_0 \leq 1$  时, 疾病将逐渐消失.

### 3 数值模拟

笔者根据已知数据对模型②进行数值模拟, 以检验该模型的准确性. 取初值分别为  $s(0) = 0.4$ ,  $e(0) = 0.2$ ,  $i(0) = 0.2$ ,  $r(0) = 0.1$ ,  $v(0) = 0.1$ , 取各参数分别为  $b = 0.013$ ,  $\mu = 0.0009$ ,  $\Psi = 0.77$ ,  $\beta = 3.66$ ,  $\sigma = 0.01$ ,  $\gamma_1 = 1.34$ ,  $\gamma_2 = 1.74$ ,  $\gamma_3 = 2.03$ , 计算可得  $R_0 = 0.055 \leq 1$ . 由定理 1 可知, 此时无病平衡点应该是渐进稳定的. 求解系统②的数值解并得到其各个函数的变化曲线, 如图 1 所示.

### 4 结论

本文依据肺结核的特点, 研究了可重复感染的肺结核 SEIRV 传播模型, 相对于文献[4]的 SEIR 模型, 增加了接种者群体函数, 方程增加了维数, 使传播模型进一步完善. 根据定理 1 的证明, 得到了  $R_0 = 1$  是区别疾病消失和持续的阈值, 当  $R_0 \leq 1$ , 疾病将消失. 对理论结果的数值模拟进一步验证了模型的正确性. 由于数据所限, 本文尚不能得出更多关于该疾

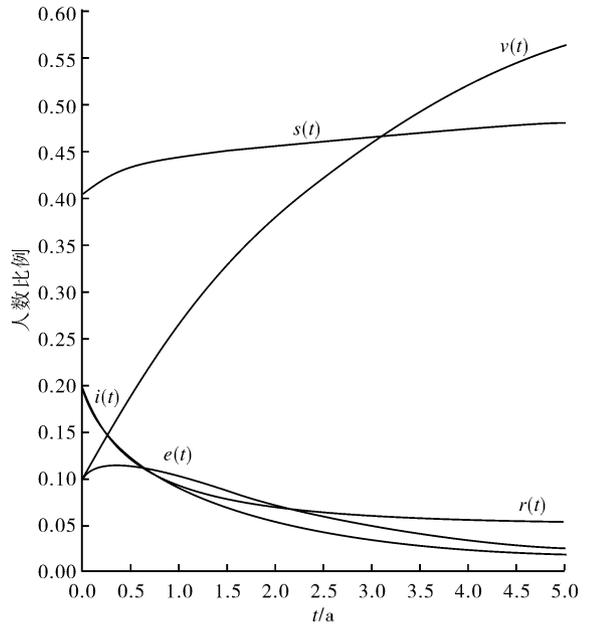


图 1  $s(t), r(t), e(t), i(t), v(t)$  的变化曲线

病的实际结果, 有待改进.

### 参考文献:

[1] Ehiaghe F A, Ehiaghe I J, Aladenika S T. The characteristics of pulmonary tuberculosis amongst patients attending chest clinic, including age, sex, occupation and hemoglobin concentration in Benin city, Nigeria[J]. Open Journal of Clinical Diagnostics, Scientific Research Publishing, 2013, 3(1):14.

[2] 杨俊元, 王娟, 李学志. 具有重复感染和染病年龄结构的两菌株 SIJR 流行病模型分析[J]. 应用泛函分析学报, 2007, 9(4):371.

[3] Li M Y, Wang L C. Global Stability in Some SEIR Epidemic Models [M]. Berlin: Springer-Verlag, 2002: 295 - 311.

[4] 李春, 李继光. 一类仅在年龄低于  $M$  的人群中传播的 SEIR 传染病模型[J]. 郑州轻工业学院学报: 自然科学版, 2010, 25(1):120.

[5] 马知恩, 周义仓. 常微分方程稳定性与稳定性方法 [M]. 北京: 科学出版社, 2001:68 - 69.

[6] LaSalle J P. 动力系统的稳定性[M]. 陆征一, 译. 成都: 四川科学技术出版社, 2002:60 - 62.