文章编号:2095-476X(2014)06-0099-04

带利息力和交易费用的风险模型的最优分红策略

岳毅蒙, 赵锐, 王辉

(商洛学院 数学与计算机应用学院, 陕西 商洛 726000)

摘要:研究了保险精算中带利息力和交易费用的经典风险模型的最优分红策略问题,认为:在分红约束的情况下,以股东的折现分红减去惩罚折现注资的差的期望值最大化为目标,利用随机控制理论建立相应的HJB方程,最终得到相应的解,并得出最优分红策略,是Threshold策略.

关键词:分红策略;随机控制;HJB方程

中图分类号:O211.6;F840.47 **文献标志码**:A **DOI**:10.3969/j.issn.2095-476X.2014.06.022

Optimal dividend strategies for a risk model under force of interest and transaction cost

YUE Yi-meng, ZHAO Rui, WANG Hui

(*College of Mathematics and Computational Science, Shangluo University, Shangluo* 726000, *China*)

Abstract: Considering the classical risk model with optimal dividend payments under force of interest and transaction cost, with maximizing the discounted dividend payments minus the penalized discounted capital injections as the object the corresponding Hamilton-Jacobi-Bellman equation was built by stochastic control theory. A method to determine numerically the solution to the integro-differential equation was derived. It showed that the optimal strategy was threshold strategy.

Key words: dividend strategy; random control; hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) equation

0 引言

最优分红问题是近几年保险精算研究中的热点问题之一,B. De Finetti[1]于1957年首次在精算大会上提出该问题后,引起了广大学者的关注.文献[2]得到了带常利率的风险模型的最优分红策略为带状策略,证明了在指数索赔情况下其为边界策略.文献[3]得到了带利息力的风险模型的最优注资和分红策略是Threshold策略,但该模型未考虑交易费用,而在实际应用中,每次分红都需要支付一定的交易费用,交易费用是一个不可忽略的因素.考虑到金融机构是监管下的企业,为保证其良性运营,监管部门会要求它保持一个正的盈余水平,即限制保险公司要保证最小正盈余大于0.本文在考虑这两种因素的前提下,结合文献[4-13]的研究,讨论带利息力和交易费用的风险模型的最优分红

收稿日期:2014-08-20

基金项目:陕西省自然科学基础研究计划项目(2013JM1023);陕西省教育厅科研项目(2013JK0605);陕西省教育科学“十二五”规划课题项目(SGH13406);商洛学院科研项目(13SKY013,10SKY023,12SKY-FWDF011)

作者简介:岳毅蒙(1984—),男,陕西省富平市人,商洛学院讲师,硕士,主要研究方向为金融数学与保险精算.

和注资问题,为保险公司的策略选择提供一定的参考.

1 模型构建

考虑保险公司的风险盈余过程

$$U_t = xe^{rt} + c\int_0^t e^{r(t-s)}\mathrm{d}s - \int_0^t e^{r(t-s)}\mathrm{d}\sum_{i=1}^{N_s} X_i$$

其中,x 是初始资金;保费收入率 $c>0$;$\{N(t)\}_{t\geqslant 0}$ 是参数为 $\lambda>0$ 的泊松过程;$\{X_i\}_{i\in N}$ 是相互独立同分布的随机变量,其概率函数为 $p(\cdot)$,均值 $E[Y_i]=\mu$. 在此模型基础上引入策略 $\pi=\{(D_t,Z_t)\}$,其中 $\{D_t\}$ 表示到时刻 t 为止的累积分红,$\{Z_t\}$ 表示到时刻 t 为止的累积注资. 一个策略要称为可行策略,需满足以下条件

1) $\{D_t\}$ 是右连左极的,增的适应的过程,且满足 $D_{0-}=0$;

2) $\{Z_t\}$ 是左连右极的,增的适应的过程,且满足 $Z_0=0$.

则盈余过程转化为

$$U_t^{\pi} = xe^{rt} + c\int_0^t e^{r(t-s)}\mathrm{d}s - \int_0^t e^{r(t-s)}\mathrm{d}\sum_{i=1}^{N_s} X_i - \int_0^t e^{r(t-s)}\mathrm{d}D_s^{\pi} + \int_0^t e^{r(t-s)}\mathrm{d}Z_s^{\pi}$$

其中,$r>0$ 表示利息力. 假设要求保险公司最低盈余 $m>0$,那么破产时刻定义为

$$T^{\pi} = \inf\{t\geqslant 0, X_{t+}^{\pi} < m\}$$

对每个可行策略 π 的值定义为

$$V^{\pi}(x) = E_x[\beta\int_{0-}^{T\pi} e^{-\delta t}\mathrm{d}D_t - \varphi\int_{0-}^{T\pi} e^{-\delta t}\mathrm{d}Z_t]$$

其中,$\beta<1$ 表示分红交易费用的比例因子,$\varphi>1$ 是罚金因子. 令 $\delta>r$,本文考虑带有约束的分红策略,则目标就是最大化值函数 $V_{\pi}(x)$,即

$$V(x) = \sup_{\pi\in\Pi} V_{\pi}(x)$$

其中,Π 表示所有可行策略的集合.

2 值函数和 HJB 方程

引理 1 值函数 $V(x)$ 在 $[m,+\infty)$ 上是增的,且满足 $\lim\limits_{x\to\infty}V(x) = \beta u_0/\delta$.

引理 2 值函数 $V(x)$ 在 $[m,+\infty)$ 上是凹的且 Lipschitz 连续.

定理 1 值函数 $V(x)$ 在 $[m,+\infty)$ 上几乎处处可导,且满足 HJB 方程

$$\max\{[(c+rx-u)V'(x)+\beta u-(\lambda+\delta)V(x)+\lambda\int_0^{\infty}V(x-y)p(y)\mathrm{d}y]\}1_{\{m<x<b^{\pi}\}} + [V(b^{\pi})+(x-b^{\pi})-V(x)]1_{\{x\geqslant b^{\pi}\}} + [V(m)+\varphi(x-m)-V(x)]1_{\{x\leqslant m\}} = 0 \quad ①$$

证明 由

$$V(x) \geqslant E_x[\beta\int_{0-}^{\tilde{\tau}-}e^{-\delta t}\mathrm{d}D_t^{\pi} - \varphi\int_{0-}^{\tilde{\tau}}e^{-\delta t}\mathrm{d}Z_t^{\pi}] =$$

$$E_x[\beta\int_{0-}^{\tau-}e^{-\delta t}\mathrm{d}D_t^{\pi} - \varphi\int_0^{\tau}e^{-\delta t}\mathrm{d}Z_t^{\pi} + \beta e^{-\delta\tau}\int_{\tau-}^{\tilde{\tau}-}e^{-\delta(t-\tau)}\mathrm{d}D_t^{\pi} - \varphi\int_{\tau}^{\tilde{\tau}}e^{-\delta(t-\tau)}\mathrm{d}Z_t^{\pi}] =$$

$$E_x[\beta\int_{0-}^{\tau}ce^{-\delta t}1_{\{x=b^{\pi}\}}\mathrm{d}t - \varphi\int_0^{\tau}e^{-\delta t}\mathrm{d}Z_t^{\pi} + \beta e^{-\delta\tau}V(X_{\tau}^{\pi}) + 1_{\{x\geqslant b^{\pi}\}}(x-b^{\pi})]$$

其中,τ 表示停时,若 $\tau\leqslant\tau^{\pi}$,则 $\tilde{\tau}=\tau^{\pi}$,所以

$$V(x) = \Phi(x,\tau^{\pi}) = \Phi(x,\tilde{\tau}) = E_x[\beta\int_{0-}^{\tau}ce^{-\delta t}1_{\{x=b^{\pi}\}}\mathrm{d}t - \varphi\int_0^{\tau}e^{-\delta t}\mathrm{d}Z_t^{\pi} + \beta e^{-\delta\tau}V(X_{\tau}^{\pi}) + 1_{\{x\geqslant b^{\pi}\}}(x-b^{\pi})]$$

综上可得

$$V(x) = \sup E_x[\beta\int_{0-}^{\tau}ce^{-\delta t}1_{\{x=b^{\pi}\}}\mathrm{d}t - \varphi\int_0^{\tau}e^{-\delta t}\mathrm{d}Z_t^{\pi} + \beta e^{-\delta\tau}V(X_{\tau}^{\pi}) + 1_{\{x\geqslant b^{\pi}\}}(x-b^{\pi})]$$

当 $x\in[m,b^{\pi}]$,应用 Itô 公式得

$$e^{-\delta(t\wedge\tau)}V(X_{t\wedge\tau}^{\pi}) = V(x) + \int_0^{t\wedge\tau}e^{-\delta t}cV'(X_s^{\pi})1_{(X_s^{\pi}<b^{\pi})}\mathrm{d}s - r\int_0^{t\wedge\tau}e^{-\delta t}V(X_s^{\pi})\mathrm{d}s + \sum_{X_s^{\pi}\neq X_{s-}^{\pi}}e^{-\delta t}(V(X_s^{\pi}) - V(X_{s-}^{\pi})) + \sum_{X_s^{\pi}\neq X_{s+}^{\pi}}e^{-\delta t}(V(X_{s+}^{\pi}) - V(X_s^{\pi})) \quad ②$$

其中,$X_s^{\pi}\neq X_{s+}^{\pi}$ 仅在注资时刻发生,所以

$$\sum_{\substack{0\leqslant s\leqslant t\wedge\tau\\ X_s^{\pi}\neq X_{s+}^{\pi}}}e^{-\delta s}[V(X_{s+}^{\pi}) - V(X_s^{\pi})] = \varphi\int_0^{t\wedge\tau}e^{-\delta s}\mathrm{d}Z_s^{\pi}$$

当索赔到达或分红时,$X_{s-}^{\pi}\neq X_s^{\pi}$,由索赔到达引起的跳,导致了

$$M(t\wedge\tau) = \sum_{\substack{0\leqslant s\leqslant t\wedge\tau\\ X_s^{\pi}\neq X_{s-}^{\pi}}}e^{-\delta s}[V(X_s^{\pi}) - V(X_{s-}^{\pi})] - \lambda\int_0^{t\wedge\tau}\int_0^{\infty}e^{-\delta s}(V(X_{s-}^{\pi}-y) - V(X_{s-}^{\pi}))\mathrm{d}F(y)\mathrm{d}s$$

是一个 0 均值的鞅. 对等式 ② 两边取期望,得

$$Ee^{-\delta(t\wedge\tau)}V(X_{t\wedge\tau}^{\pi}) = V(x) + E\varphi\int_0^{t\wedge\tau}e^{-\delta s}\mathrm{d}Z_s^{\pi} +$$

$$E\int_0^{t\wedge\tau} e^{-\delta s}[(c+rx-u)V'(X_s^\pi)+$$
$$\lambda\int_0^\infty V(X_s^\pi-y)]\mathrm{d}F(y)-(\lambda+\delta)V(X_s^\pi)+$$
$$\beta u]1_{\{x<b^\pi\}}\mathrm{d}s+E\int_0^{t\wedge\tau} e^{-\delta s}\Big[\lambda\int_0^\infty V(X_s^\pi-y)\Big]\mathrm{d}F(y)-$$
$$(\lambda+\delta)V(X_s^\pi)]1_{\{x=b^\pi\}}\mathrm{d}s$$

若 $x\in C\cap(0,b^\pi)$,假设 C 是开集,则 $\tau^\pi>0$,化简上式得

$$(c+rx-u)V'(x)+\beta u-(\lambda+\delta)V(x)+$$
$$\lambda\int_0^\infty V(x-y)p(y)\mathrm{d}y=0$$

若 $x\in C\cap[b^\pi,\infty)$,则

$$V(x)=V(b^\pi)+x-b^\pi$$

若 $x\in C\cap(-\infty,m]$,则

$$V(x)=V(m)+\varphi(x-m)$$

故对于 $x\in C$,有

$$[(c+rx-u)V'(x)+\beta u-(\lambda+\delta)V(x)+$$
$$\lambda\int_0^\infty V(x-y)p(y)\mathrm{d}y\}]1_{\{m<x<b^\pi\}}+$$
$$[V(b^\pi)+(x-b^\pi)-V(x)]1_{\{x\geqslant b^\pi\}}+$$
$$[V(m)+\varphi(x-m)-V(x)]1_{\{x\leqslant m\}}=0$$

若假设 τ 为任意停时,则当 $x\in(m,b^\pi)$ 时,有

$$(c+rx-u)V'(x)+\beta u-(\lambda+\delta)V(x)+$$
$$\lambda\int_0^\infty V(x-y)p(y)\mathrm{d}y\leqslant 0$$

当 $x\in[b^\pi,\infty)$ 时,有

$$V(x)\geqslant V(b^\pi)+x-b^\pi$$

当 $x\in(-\infty,m]$ 时,有

$$V(x)\geqslant V(m)+\varphi(x-m)$$

所以,对于 $x\in R$,有

$$[(c+rx-u)V'(x)+\beta u-(\lambda+\delta)V(x)+$$
$$\lambda\int_0^\infty V(x-y)p(y)\mathrm{d}y]1_{m<x<b^\pi}+$$
$$[V(b^\pi)+(x-b^\pi)-V(x)]1_{\{x\geqslant b^\pi\}}+$$
$$[V(m)+\varphi(x-m)-V(x)]1_{\{x\leqslant m\}}\leqslant 0$$

又 $V(x)\geqslant 0(x\in R)$,因此对于每个 x,上面两个不等式至少有一个成立,即定理成立.

3　最优分红策略

由引理 1 知,一定存在一个常数

$$b^*=\inf\{x:V'(x)\leqslant\beta\}$$

根据定理 1 构建策略 $\pi^*=\{u_t^*,Z_t^{u_t^*}\}$ 满足

$$u_t^*=\begin{cases}0,x<b^*\Leftrightarrow V'(x)>\beta\\ \alpha,x\geqslant b^*\Leftrightarrow V'(x)\leqslant\beta\end{cases}\qquad ③$$

即盈余在 m 和 b^* 之间时,不发生分红和注资;当盈余到达或超过 b^* 时,以比率 α 进行分红,但不注资;当盈余小于 m 时,发生注资.

定理 2　由 ③ 给出的 Threshold 策略 $\pi^*=\{u_t^*,Z_t^*\}$ 是最优策略.

证明　易知策略 $\pi^*=\{u_t^*,Z_t^*\}$ 是一个允许策略. 令 $V^*(x)$ 表示相应的值函数,T^* 表示策略 ③ 下破产时刻,由引理 2 和方程 ① 可得

$$f(X_{t\wedge T^*}^{\pi^*})e^{-\delta(t\wedge T^*)}-f(x)+$$
$$\beta\int_0^{t\wedge T^*}e^{-\delta s}U_s^*\mathrm{d}s-\varphi\int_0^{t\wedge T^*}e^{-\delta s}\mathrm{d}Z_s^*$$

是一个期望为 0 的鞅. 所以

$$f(x)=E_x[f(X_{t\wedge T^*}^{\pi^*})e^{-\delta(t\wedge T^*)}-f(x)+$$
$$\beta\int_0^{t\wedge T^*}e^{-\delta s}U_s^*\mathrm{d}s-\varphi\int_0^{t\wedge T^*}e^{-\delta s}\mathrm{d}Z_s^*]$$

由 $f(x)$ 的有界性可知,当 $t\to\infty$ 时,有

$$E_x[f(X_{t\wedge T^*}^{\pi^*})e^{-\delta(t\wedge T^*)}]\to 0$$

故 $f(x)=V^*(x)\leqslant V(x)$.

另外,由于 $f(x)$ 是增的且当 $x\leqslant -f(0)/\varphi$ 时,$f(x)=0$,$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上非负,对任意策略 π,由 HJB 方程可知

$$f(x)\geqslant E[f(X_{t\wedge T}^\pi)e^{-\delta(t\wedge T)}-f(x)-\varphi\int_0^{t\wedge T}e^{-\delta s}\mathrm{d}Z_s]\geqslant$$
$$E[\beta\int_0^{t\wedge T}e^{-\delta s}U_s\mathrm{d}s-\varphi\int_0^{t\wedge T}e^{-\delta s}\mathrm{d}Z_s]$$

令 $t\to\infty$,则 $f(x)\geqslant V^\pi(x)$.

所以 $f(x)=V(x)$.

4　结语

本文在带利息力和交易费用的基础上考虑风险模型的最优分红问题,利用随机控制理论建立相应的 HJB 方程,求出相应的解,得出最优策略是 Threshold 策略的结论. 这一研究推广了前人的理论,使风险模型更加符合实际,更具现实意义,这一结论可为保险公司的稳健性经营提供某种理论支持.

参考文献:

[1]　De Finetti B. Su un'impostazione alternativa della teoria collettiva del rischio[J]. Transactions of the XVth International Congress of Actuaries,1957,2(1):433.

[2] Albrecher H, Thonhauser S. Optimal dividend strategies for a risk process under force of interest[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2008, 43(1): 134.
[3] Fang Y, Qu Z. Optimal dividend and capital injection strategies for a risk model under force of interest[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2013, 2013: 110.
[4] Fang Y, Wu R. Optimal dividend strategy in the compound Poisson model with constant interest[J]. Stochastic Models, 2007, 23(1): 149.
[5] Gao S, Liu Z. The perturbed compound Poisson risk model with constant interest and a threshold dividend strategy[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2010, 233(9): 2181.
[6] Cai J, Yang H. Ruin in the perturbed compound Poisson risk process under interest force[J]. Advances in Applied Probability, 2005, 2005: 819 – 835.
[7] Lin X S, Pavlova K P. The compound Poisson risk model with a threshold dividend strategy[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2006, 38(1): 57.
[8] Scheer N, Schmidli H. Optimal dividend strategies in a Cramer-Lundberg model with capital injections and administration costs[J]. European Actuarial Journal, 2011, 1(1): 57.
[9] Zhu J. Optimal dividend control for a generalized risk model with investment incomes and debit interest[J]. Scandinavian Actuarial Journal, 2013(2): 140.
[10] Avanzi B, Shen J, Wong B. Optimal dividends and capital injections in the dual model with diffusion[J]. Astin Bulletin, 2011, 41(2): 611.
[11] Bayraktar E, Kyprianou A E, Yamazaki K. Optimal dividends in the dual model under transaction costs[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2014, 54: 133.
[12] 岳毅蒙. 考虑交易费用和管理费用的 Cramer-Lundberg 模型的最优分红策略[J]. 郑州轻工业学院学报: 自然科学版, 2014, 29(4): 100.
[13] 李野默, 王秀莲. 复合泊松风险模型中观察间隔为均匀分布时的贴现罚金函数[J]. 天津师范大学学报: 自然科学版, 2014, 34(2): 12.

(上接第 94 页)

并研究其识别性能. 由于本文对阈值的选择和修改更具有科学性和合理性, 即它与训练过程紧密结合, 具有动态性. 因此, 实验结果表明, 本文方法能取得优于仅使用 WNN 和 FNN 方法的识别效果.

目前很多相关算法只是靠经验和有限的实验给定参数, 但没有讨论参数制定的合理性. 采用遗传算法优化参数是一个很好的思路, 因此, 寻找更高效的定参方案, 将是下一步研究的重点.

参考文献:

[1] 陈付华. 小波在图像分析中的若干关键技术研究[D]. 南京: 南京理工大学, 2002: 1 – 6.
[2] 李逊, 谢红胜. 基于遗传算法的小波神经网络[J]. 计算机与数字工程, 2007, 35(8): 5.
[3] 张加云, 张德江, 李新胜. 遗传小波神经网络在钢铁企业能耗预测中的应用[J]. 冶金自动化, 2009, 33(S1): 849.
[4] 赵金宪, 金鸿章. 基于小波包和神经网络的瓦斯传感器故障诊断[J]. 传感器与微系统, 2010, 29(5): 80.
[5] 赵劲松, 李元, 邱彤. 一种基于小波变换与神经网络的传感器故障诊断方法[J]. 清华大学学报: 自然科学版, 2013, 53(2): 205.
[6] Krishna B, Rao Y R, Nayak P C. Time series modeling of river flow using wavelet neural networks[J]. Journal of Water Resource and Protection, 2012, 3(1): 50.
[7] 董长虹. Matlab 小波分析工具箱原理与应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 2004: 108 – 118.
[8] Minu K K, Lineesh M C, Jessy J C. Wavelet neural networks for nonlinear time series analysis[J]. Applied Mathematical Sciences, 2011, 4(2): 2485.