文章编号:2095-476X(2015)02-0102-03

双复合二项风险模型的破产概率

成军祥， 张艳

(河南理工大学 数学与信息科学学院，河南 焦作 454000)

摘要: 在随机利率下，考虑资产组合的投资收益下单位时间内收到保单数和索赔次数都符合二项分布的风险模型，对模型的调节系数和破产概率等重要结论进行了研究，建立了更为客观实际的双险种风险经营模型，给出模型在初始准备金 $u=U(0)$ 时的破产概率 $\Psi(u)$ 在某些特殊情形下的表达式.

关键词: 破产概率; 二项分布; 双险种; 随机利率

中图分类号: O211; F840 **文献标志码:** A **DOI:** 10.3969/j.issn.2095-476X.2015.02.022

Ruin probability of double compound binomial risk model

CHENG Jun-xiang, ZHANG Yan

(*College of Mathmatics and Information Science, He´nan Polytechnic University, Jiaozuo* 454000, *China*)

Abstract: Under the stochastic interest rate, the insurance policies and investment returns were bivariate discrete risk model with random variables, stochastic investment yields under the double binomial risk model, and the general formula was gottenfor the ruin probability $\Psi(u)$ when the initial reserve was $u=U(0)$ in certain special circumstances which not only strengthened the reality description ability of the model, and had more practical meaning to promote stable operation of the insurance company, the insurance company insolvency probability study.

Key words: ruin probability; binomial distribution; double risk; stochastic interest rate

0 引言

随着保险公司经营规模不断扩大，险种也日益多元化，经典风险理论的弊端日益凸显. 经典风险理论虽然大大降低了数学处理的繁琐性，但不能真实有效地反映现实生活中保险公司的经营情况，因此研究者在经典风险模型的基础上作进一步研究，以建立更加合理有效的模型.

目前有许多文献[1-6]在经典风险模型的基础上进行拓宽，主要表现在5个方面: 对保费收入过程的推广[7]; 对理赔过程的推广; 多险种风险模型的推广[8]; 考虑带干扰的模型; 考虑通胀率和利息率在保险公司实际经营过程中的作用. 保险公司拥有大量资金，其经营者为降低破产的风险，往往会将初始资本金和单位时间内收到的保费进行整合，作为其他投资的本金，如投资股票、债券、基金、期货、期权等. 每种投资都有不同的投资收益率，即使同种投资，产生的投资收益率也会随时间发生改变. 为了使经典风险模型更贴合实际情况，本文拟建立投资收益率服从正态分布的资产组合，其单位时间内收到保单数和索赔次数都符合二项分布的风险模型，对模型的调节系数和破产概率等重要因素进行研究，为保险公司稳定经营提供更为可靠的理论依据.

1 建立模型

经典的复合二项风险模型定义为

$$U(n)=u+cn-S(n) \qquad S(n)=\sum_{i=1}^{N(n)}X_i$$

收稿日期: 2014-10-09

作者简介: 成军祥(1965—)，男，河南省武陟县人，河南理工大学副教授，硕士，主要研究方向为应用概率统计.

$$n = 0,1,2,\cdots$$

其中，u 和 c 为常数，u 表示保险公司的初始资本，$c > 0$ 为每份保单收取的保费，假定保费收入是公司的唯一收入；$S(n)$ 表示至时刻 n 为止保险公司的总赔付量；$N(n)$ 为 $(0,n]$ 时间区间内发生的总理赔次数；X_i 表示第 i 次的理赔额.

定义 1　设 (Ω,F,p) 为完备的概率空间，$u \in Z = \{0,1,2,3,\cdots\}$，$c \in Z^+ = \{1,2,3\cdots\}$，文中所有的随机变量都是定义在此空间上的，定义保险公司在 n 时刻的盈余

$$U(n) = (u - I) + I(1 + \sum_{j=1}^{n} F_j) + cM(n) - S(n)$$

其中，I 是综合考虑各项因素用于投资的金额，$M(n)$ 表示保险公司在 $(0,n]$ 时间内收到的保单数，F_j 表示资产组合在第 j 个单位时间内的投资收益率.

对上述模型做如下假设：

1) $\{X_k,k \geqslant 1\}$，$\{Y_j,j \geqslant 1\}$ 分别是均值为 μ_1，μ_2，方差为 δ_1，δ_2 的取值在 $(0,+\infty)$ 区间的独立同分布的随机变量序列，其分布函数分别为 $F_1(x)$，$F_2(x)$；

2) $\{F_j,j \geqslant 1\}$ 是服从参数为 r，${\sigma_r}^2$ 的正态分布；

3) $\{M(n),n \geqslant 0\}$，$\{N_1(n),n \geqslant 0\}$，$\{N_2(n),n \geqslant 0\}$ 分别服从参数为 p_1，p_2，p_3 的二项分布，即

$$P\{M(n) = k\} = {C_n}^k {p_1}^k {q_1}^{n-k}$$

$$P\{N_1(n) = k\} = {C_n}^k {p_2}^k {q_2}^{n-k}$$

$$P\{N_2(n) = k\} = {C_n}^k {p_3}^k {q_3}^{n-k}$$

其中，$q_1 = 1 - p_1$，$q_2 = 1 - p_2$，$q_3 = 1 - p_3$；

4) $\{M(n),n \geqslant 0\}$，$\{N_1(n),n \geqslant 0\}$，$\{N_2(n),n \geqslant 0\}$，$\{F_j,j \geqslant 1\}$，$\{X_k,k \geqslant 1\}$，$\{Y_j,j \geqslant 1\}$ 相互独立.

记 $B(n) = I\sum_{j=1}^{n} F_j + cM(n) - \sum_{k=1}^{N_1(n)} X_k - \sum_{i=1}^{N_2(n)} Y_i$，表示保险公司在 n 时刻的盈利. 为保证保险公司能够正常经营不至于破产，结合模型，要求 $E[B(n)] > 0$，即

$$E[B(n)] = E[I\sum_{j=1}^{n} F_j + cM(n) - \sum_{k=1}^{N_1(n)} X_k - \sum_{i=1}^{N_2(n)} Y_i] =$$

$$IE[\sum_{j=1}^{n} F_j] + cE[M(n)] - E[\sum_{k=1}^{N_1(n)} X_k] - E[\sum_{i=1}^{N_2(n)} Y_i] =$$

$$I\sum_{j=1}^{n} r + cnp_1 - E[X_k]E[\sum_{k=1}^{n} N_1(n)] -$$

$$E[Y_i]E[\sum_{i=1}^{n} N_2(n)] = Inr + cnp_1 - \mu np_2 - \mu np_3 > 0$$

所以 $Ir + cp_1 > \mu p_2 + \mu p_3$，由此定义相对安全负荷系数 $\theta = \dfrac{Ir + cp_1}{\mu p_2 + \mu p_3} - 1 > 0$.

记保险公司破产时刻 $T = \min\{n \mid n \geqslant 0, U(n) < 0\}$，则在初始资本为 u 的条件下，定义保险公司最终破产概率

$$\Psi(u) = P[T < \infty \mid U(0) = u] =$$

$$P\{\exists t \geqslant 0, U(t) \leqslant 0\}$$

2　预备引理

引理 1　盈利过程 $\{B(n),n \geqslant 0\}$ 有以下性质：1) 具有平稳独立增量性；2) 存在正数 v，使得 $E[e^{-vB(n)}] < \infty$.

引理 2　对于盈利过程 $\{B(n),n \geqslant 0\}$，存在函数 $g(v)$，使得 $E[e^{-vB(n)}] = e^{ng(v)}$，且当 $-I{\sigma_r}^2 + c^2p_1q_1 > 0$ 时，方程 $g(v) = 0$ 有唯一正解 R，并称之为调节系数.

证明

$$E[e^{-vB(n)}] =$$

$$E\{\exp - v[I\sum_{j=1}^{n} F_j + cM(n) - \sum_{k=1}^{N_1(n)} X_k - \sum_{i=1}^{N_2(n)} Y_i]\} =$$

$$E[\exp(-vI\sum_{j=1}^{n} F_j)] \cdot E[\exp(-vcM(n)] \cdot$$

$$E[\exp(v\sum_{k=1}^{N_1(n)} X_k)] \cdot E[\exp(v\sum_{i=1}^{N_2(n)} Y_i)] =$$

$$\exp[-nI(rv + \frac{1}{2}{\sigma_r}^2 v^2)] \cdot (p_1e^{-cv} + q_1)^n \cdot$$

$$(p_2M_X(v) + q_2)^n \cdot (p_3M_Y(v) + q_3)^n =$$

$$\exp\{n[-I(rv + \frac{1}{2}{\sigma_r}^2 v^2) + \ln(p_1e^{-cv} + q_1) +$$

$$\ln(P_2M_X(v) + q_2) + \ln(p_3M_Y(v) + q_3)]\}$$

其中，$M_X(v) = E[e^{vX}] = \sum_{i=1}^{\infty} e^{vi}P\{X = i\}$，$M_Y(v) = E[e^{vY}] = \sum_{i=1}^{\infty} e^{vi}P\{Y = i\}$ 为理赔额 $\{X_k,k \geqslant 1\}$，$\{Y_j,j \geqslant 1\}$ 的矩母函数. 而 $E[e^{-vB(n)}] \neq 0$，则由引理 1 可知，存在函数 $g(v)$ 使得 $E[e^{-vB(n)}] = e^{ng(v)}$，且

$$g(v) = -I(rv + \frac{1}{2}{\sigma_r}^2 v^2) + \ln(p_1e^{-cv} + q_1) +$$

$$\ln(p_2M_X(v) + q_2) + \ln(p_3M_Y(v) + q_3)$$

又 $g(0) = 0$，则

$$g'(v) = -I(r + {\sigma_r}^2 v) - \frac{cp_1e^{-cv}}{p_1e^{-cv} + q_1} +$$

$$\frac{p_2E(Xe^{vX})}{p_2M_X(v) + q_2} + \frac{p_3E(Ye^{vY})}{p_3M_Y(v) + q_3}$$

$$g''(v) = -I{\sigma_r}^2 + \frac{c^2p_1q_1e^{-cv}}{(p_1e^{-cv} + q_1)^2} +$$

$$\frac{p_2E(X^2e^{vX})(p_2M_X(v)+q_2)-{p_2}^2E^2(Xe^{vX})}{(p_2M_X(v)+q_2)^2}+$$
$$\frac{p_3E(Y^2e^{vY})(p_3M_Y(v)+q_3)-{p_3}^2E^2(Ye^{vY})}{(p_3M_Y(v)+q_3)^2}$$

且由施瓦兹(Sclwarz)不等式,有

$$p_2E(X^2e^{vX})p_2M_X(v)=$$
$${p_2}^2E(X^2e^{vX})E(e^{vX})\geqslant{p_2}^2E^2(Xe^{vX})$$
$$p_3E(Y^2e^{vY})p_3M_Y(v)=$$
$${p_3}^2E(Y^2e^{vY})E(e^{vY})\geqslant{p_3}^2E^2(Ye^{vY})$$

所以当 $v>0$ 且 $-I{\sigma_r}^2+c^2p_1q_1>0$ 时,有

$$g''(v)=-I{\sigma_r}^2+\frac{c^2p_1q_1e^{-cv}}{(p_1e^{-cv}+q_1)^2}+$$
$$\frac{p_2E(X^2e^{vX})(p_2M_X(v)+q_2)-{p_2}^2E^2(Xe^{vX})}{(p_2M_X(v)+q_2)^2}+$$
$$\frac{p_3E(Y^2e^{vY})(p_3M_Y(v)+q_3)-{p_3}^2E^2(Ye^{vY})}{(p_3M_Y(v)+q_3)^2}>0$$

所以 $g(v)$ 有极小值点,因而方程 $g(v)=0$ 有两个解,其中 $v=0$ 为平凡解.

又 $g'(0)=-Ir-cp_1+\mu p_2+\mu p_3<0$,且当 $v\to\infty$ 时,$g'(v)\to\infty$,故方程 $g(v)=0$ 必有1个非平凡解,即方程 $g(v)=0$ 存在唯一正解 R.

3 破产概率

定理1 风险模型 $\{U(n),n=1,2,\cdots\}$ 的最终破产概率满足

$$\Psi(u)=\frac{e^{-Ru}}{E[e^{-RU(T)}\mid T<\infty]}$$

其中,R 为调节系数,特别地,$\Psi(u)\leqslant e^{-Ru}$.

证明 对任意的 $n\geqslant1$ 和 $v>0$,有

$$E[e^{-vU(n)}]=E[e^{-vU(n)}\mid T<n]\Pr\{T<n\}+$$
$$E[e^{-vU(n)}\mid T\geqslant n]\Pr\{T\geqslant n\}\qquad ①$$

由 $U(n)$ 的定义可知,右端的第一项(记为 D_1),$U(n)$ 写成 $U(n)=U(T)+[B(n)-B(T)]$,则对于给定的 T,$[B(n)-B(T)]$ 与 $U(T)$ 独立,从而

$$D_1=E[e^{-vU(T)}e^{-v[B(n)-B(T)]}\mid T<n]\Pr\{T<n\}=$$
$$E[e^{-vU(T)}\mid T<n]\exp\{-I(rv+\frac{1}{2}{\sigma_r}^2v^2)+$$
$$\ln(p_1e^{-cv}+q_1)+\ln(p_2M_X(v)+q_2)+$$
$$\ln(p_3(M_Y(v)+q_3)(n-T)\Pr\{T<n\}$$

利用引理3,令 $v=R$,于是 ① 式可变为

$$e^{-Ru}=E[e^{-RU(T)}\mid T<n]P^u\{T<n\}+$$
$$E[e^{-RU(T)}\mid T\geqslant n]P^u\{T<n\}\qquad ②$$

记 ② 式右端第1项为 D_2,第2项为 D_3,令 $n\to\infty$,D_2 变为 $E[e^{-RU(T)}\mid T\geqslant n]\Pr\{T\geqslant n\}$,若能证明当 $n\to\infty$ 时,$D_3\to0$,则定理得证. 不妨设 $Var(X)$ 有限,记

$$\alpha=Ir+cp_1-\mu_1p_2-\mu_2p_3$$
$$\beta^2=I^2{\sigma_r}^2+c^2p_1q_1+$$
$$p_2(q_2{\mu_1}^2+{\sigma_1}^2)+p_3(q_3{\mu_2}^2+{\sigma_2}^2)$$

易知 $Var[U(n)]=n\beta^2$. 由于 $\alpha>0$,考察 $\Delta=u+n\alpha-\beta n^{\frac{2}{3}}$,只要 n 充分大,Δ 是正的,且当 $n\to\infty$ 时 $\Delta\to\infty$. 将 D_3 拆成两项,有

$$E[e^{-RU(T)}\mid T\geqslant n]\Pr\{T\geqslant n\}=E[e^{-RU(T)}\mid T\geqslant n,$$
$$0\leqslant U(n)\leqslant\Delta]\Pr\{T\geqslant n,0\leqslant U(n)\leqslant\Delta\}+$$
$$E[e^{-RU(T)}\mid T\geqslant n,U(n)>\Delta]\Pr\{T\geqslant n,$$
$$U(n)>\Delta\}\leqslant\Pr\{0\leqslant U(n)\leqslant\Delta\}+e^{-R\Delta}\qquad ③$$

由 Chebychev 不等式,得

$$\Pr\{0\leqslant U(n)\leqslant\Delta\}=\Pr\{0\leqslant U(n)\leqslant$$
$$E[U(n)-\beta n^{\frac{2}{3}}]\}\leqslant$$
$$\Pr\{\mid U(n)-E[U(n)]\mid\geqslant\beta n^{\frac{2}{3}}\}\leqslant$$
$$Var[U(n)]\beta^{-2}n^{-\frac{4}{3}}=n^{-\frac{1}{3}}$$

于是当 $n\to\infty$ 时,③ 式右端趋于零,从而 $D_3\to0$,故在 ② 式中令 $n\to\infty$,有

$$\Psi(u)=\frac{e^{-Ru}}{E[e^{-RU(T)}\mid T<\infty]}$$

再注意到 $U(T)<0$,$e^{-RU(T)}>1$,从而 $\forall u\geqslant0$,有 $\Psi(u)\leqslant e^{-Ru}$.

定理得证.

该定理是破产概率的一个上界,只与调节系数、初始资本金、投资资本和随机利率有关,保险公司可根据该理论来拟定初始资本金,为破产风险的研究提供更好的理论依据.

参考文献:

[1] 高明美,赵明清,王建新. 双二项风险模型的破产概率[J]. 经济数学,2004,21(1):6.

[2] 马翀,杨善朝. 双二项模型下的破产概率研究[J]. 广西师范大学学报:自然科学版,2004,22(3):35.

[3] 张建业,王永茂,秦桂霞. 广义双二项风险模型的破产概率和 Lundberg 不等式[J]. 经济数学,2008,25(3):224.

[4] 赵飞,王汉兴. 双二项风险模型的破产概率[J]. 应用数学与计算数学学报,2004,18(2):73.

[5] GrandelI J. Aspects of Risk Theory[M]. New York:Springer-Verlag,1991.

[6] 徐金福,刘再明. 广义二项风险模型下的破产概率[J]. 数学理论与应用,2004,24(1):93.

[7] 龚日朝,刘永清. 广义复合二项风险模型下的生存概率[J]. 湘潭大学学报:自然科学版,2001,23(2):15.

[8] 杜雪樵,沈学婷. 多险种风险模型的破产概率[J]. 合肥工业大学学报:自然科学版,2006(3):376.