

# 空气弹簧动态刚度和阻尼数学模型的建立

高芳

(河南经贸职业学院 技术科学系, 河南 郑州 450018)

**摘要:**根据运动学、气体动力学和气体热力学相关理论,推导了某空气弹簧振动的动力学方程、流经阻尼孔气体流量的微分方程,建立了空气弹簧的动态刚度和阻尼数学模型.由该数学模型可知,空气弹簧动态刚度与阻尼和气室体积、阻尼孔直径、簧内初始压力、等效工作面积及主气室横截面积等参数有关,同时随外界激振频率而变化.以阻尼孔直径对空气弹簧的动态性能影响为例,验证了该模型是有效的、实用的.

**关键词:**空气弹簧;动态刚度;阻尼

**中图分类号:**TH135 **文献标志码:**A **DOI:**10.3969/j.issn.2095-476X.2015.3/4.023

## Mathematical model establishment for dynamic stiffness and damp of air spring

GAO Fang

(Department of Technical Sciences, He'nan Economy and Trade Vocational College, Zhengzhou 450018, China)

**Abstract:** According to the related theories of kinematics, gas dynamics and gas thermodynamics, the kinematical equations for vibration of the air spring, and the differential equation of the gas flow rate through the damping hole air spring through the damping hole gas were deduced firstly. Then, the mathematical model of dynamic stiffness and damping was established. The mathematical model showed that the dynamic stiffness and damping of the air spring were related to the parameters of air chamber volume, damping hole diameter, initial spring pressure, equivalent working area and cross-sectional area of main air chamber, at the same time they changed with external vibration frequency. Finally, taking the effect of damping hole diameter on dynamic performance of air spring as the example, the model was confirmed that it was effective and practical.

**Key words:** air spring; dynamic stiffness; damp

## 0 引言

随着科技的发展进步,制造业对机械设备的加工精度提出了更高的要求.工业生产上普遍存在振动现象,振动会降低设备的性能,减少设备的寿命,因此需要严格控制振动,采用空气弹簧隔振是常用的一种减小振动的方法.空气弹簧是利用柔性密闭容器中气体的可压缩性以实现减振效果的装置.建立空气弹簧各参数与其动态性能之间的理论模型,

是研究其隔振性能的常用方法.国内外学者开展了大量研究,分析了空气弹簧气室体积<sup>[1]</sup>、有效工作面积及其变化率<sup>[2]</sup>、外界激振频率<sup>[3]</sup>、橡胶囊的复合刚度<sup>[4]</sup>、流经阻尼孔的气流振动<sup>[5]</sup>对空气弹簧整体刚度和阻尼的影响.但目前建立的诸多理论模型中,能够较好地说明空气弹簧结构参数及各因素间耦合关系对系统隔振性能影响的还很少.鉴于此,本文拟以某空气弹簧为例,运用运动学、气体动力学、气体热力学等理论,建立空气弹簧的等效动态

刚度和阻尼数学模型, 以期分析各参数对空气弹簧动态特性的影响规律、合理调整空气弹簧的参数、有效隔离振动提供理论根据。

### 1 空气弹簧结构及工作原理

本文所研究的空气弹簧 (结构如图 1 所示), 主要由活塞、橡胶囊、主气室、附加气室和连接主附气室的常开阻尼孔、可调阻尼孔组成。主气室是由金属壳体 and 橡胶囊围成的腔室, 体积可随橡胶囊位置的变化而改变。附加气室是体积恒定的金属腔体。常开阻尼孔是直径 0.7 mm 的圆形孔, 置于主、附气室间的金属板上。可调阻尼孔结构如图 2 所示, 是角度为 4° 的锥形孔, 开在附加气室壁上, 通过气道与主气室连接。在锥形孔上安装一个阻尼杆, 阻尼杆一端为与锥形孔配合的锥形头, 另一端带有旋转螺纹, 用以调整阻尼杆的横向位置, 进而控制阻尼孔的大小。

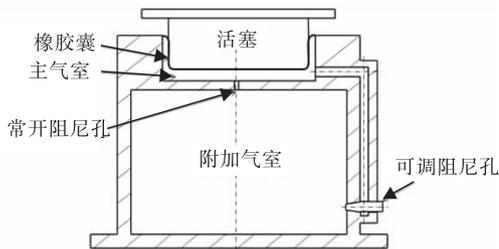


图 1 空气弹簧结构

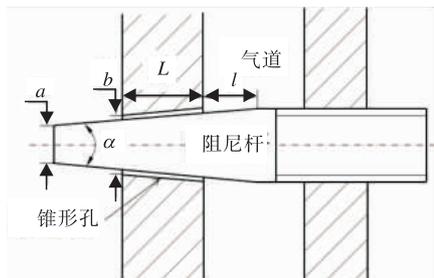


图 2 可调阻尼孔结构

为研究方便, 将常开阻尼孔和可调阻尼孔等效为一个与二者总面积相等的圆形阻尼孔, 则等效阻尼孔的直径

$$d = \begin{cases} \sqrt{d_c^2 + 4(bt \tan \alpha - lt \tan \alpha)^2} & \text{当 } 0 \leq l \leq \frac{b-a}{2 \tan \alpha} \\ \sqrt{d_c^2 + 4(alt \tan \alpha + lt \tan \alpha)^2} & \text{当 } \frac{b-a}{2 \tan \alpha} < l \leq \frac{b-a}{2 \tan \alpha} + L \\ \sqrt{d_c^2 + b^2} & \text{当 } \frac{b-a}{2 \tan \alpha} + L < l \end{cases}$$

式中,  $d_c$  为常开阻尼孔直径,  $a$  为阻尼杆锥形头端面直径,  $b$  为锥形孔在附加气室内壁的孔径,  $l$  为阻尼孔横向位移,  $\alpha$  为锥形头角度,  $L$  为锥形孔长度。

当空气弹簧振动时, 主、附气室体积变化, 气室内的气压也发生变化, 气体经阻尼孔在两个气室间流通。振动能量随气体流通过程中做功及分子内能损耗而减少, 从而起到隔振的作用。

### 2 空气弹簧动态刚度和阻尼的数学建模

当空气弹簧的基座振动时, 主、附气室内气体状态都会发生变化。本文作以下假设: 基座振动导致的橡胶囊形变量极小; 主气室体积随橡胶囊伸缩呈线性变化; 簧内气体出现绝热变化。

#### 2.1 空气弹簧振动的动力学方程推导

假设空气弹簧承载质量块质量为  $m$ , 其运动状态变化如图 3 所示。静止时主、附气室内气体表压力均为  $p_0$ , 体积分别为  $V_0$  和  $V_f$ 。忽略活塞的质量, 认为  $p_0$  完全由质量块的重力产生, 则空气弹簧的有效工作面积  $A_0$  为空气弹簧垂直方向受到的力与主气室表压力的比值, 即

$$A_0 = mg/p_0 \tag{1}$$

式中, 重力加速度  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ 。

假设空气弹簧在时刻  $t$  以位移  $Z_0(t)$  向上运动, 主气室体积减小, 其内气体压力增大  $\Delta p$ 。由于主、附气室间产生了压力差, 部分气体经阻尼孔流向附加气室, 附加气室气压随之增加, 同时质量块也在气体压力的作用下产生响应位移  $Z(t)$ 。根据牛顿第二定律及式①, 得空气弹簧振动的动力学方程为

$$m \ddot{Z}(t) = (p_0 + \Delta p) A_0 - mg = A_0 \Delta p \tag{2}$$

其中,  $\ddot{Z}(t)$  是时刻  $t$  时质量块  $m$  的加速度。

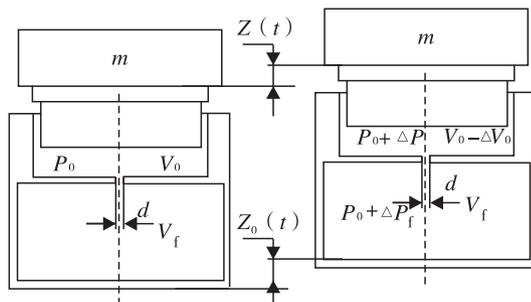


图 3 空气弹簧运动状态变化示意图

#### 2.2 流经阻尼孔气体流量的微分方程推导

在上述振动过程中, 主、附气室内气体压力及气体量均发生了变化, 依据理想气体多变方程, 主、

附气室内气体由静止状态进入被压缩的过程中,有

$$\begin{cases} (p_0 + p_a)(V_0 - V)^n = (p_0 + p_a + \Delta p)(V_0 - \Delta V)^n \\ (p_0 + p_a)(V_f - V)^n = (p_0 + p_a + \Delta p_f)V_f^n \end{cases} \quad (3)$$

式中,标准大气压  $p_a = 1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$ ,  $V$  为主气室流向附加气室气体的体积在静止状态下的等效值/ $\text{m}^3$ ,绝热变化时气体多变指数  $n = 1.4^{[6]}$ ,  $\Delta V$  为主气室体积的改变量/ $\text{m}^3$ ,  $V_f$  为附加气室体积/ $\text{m}^3$ ,  $\Delta p_f$  为附加气室内气体压力的改变量/ $\text{Pa}$ .

整理式③得

$$\begin{cases} \Delta p = (p_0 + p_a) \left( \frac{V_0 - V}{V_0 - \Delta V} \right)^n - (p_0 + p_a) \\ \Delta p_f = (p_0 + p_a) \left( \frac{V_f - V}{V_f} \right)^n - (p_0 + p_a) \end{cases} \quad (4)$$

设  $p$  为空气弹簧静止状态下簧内气体的绝对压力,  $x$  为主气室橡胶囊振动时垂直方向的形变量,则

$$\begin{cases} p = p_0 + p_a \\ x = Z_0(t) - Z(t) \end{cases} \quad (5)$$

空气弹簧主气室体积随橡胶囊形变量  $x$  变化而改变,根据假设,其变化为线性,则

$$\Delta V = (dV/dx)x = A_s x$$

式中,  $A_s$  为主气室横截面积.

由于  $V$  和  $\Delta V$  远小于  $V_0$  和  $V_f$ ,将式④泰勒展开,并将式⑤代入整理,即可得到振动过程中主、附气室内气体压力增量分别为

$$\begin{cases} \Delta p \approx \frac{npA_0}{V_0}x - \frac{np}{V_0}V \\ \Delta p_f \approx \frac{np}{V_f}V \end{cases} \quad (6)$$

由于气体在流经阻尼孔过程中的势能变化可忽略不计,主、附气室压力增量导致的空气密度变化微小,均可等效为静止状态下的密度值,因此根据伯努利方程,得到两个气室内气体压力与流速的关系式为

$$p + \Delta p + \frac{1}{2}\rho v_{s0}^2 = p + \Delta p_f + \frac{1}{2}\rho v_{sf}^2 \quad (7)$$

式中,  $\rho$  为静止状态时簧内气体密度,  $v_{s0}$  为主气室内气体流速/ $(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$ ,  $v_{sf}$  为附加气室内气体流速/ $(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$ .

当  $\Delta p > \Delta p_f$  时,主气室内气体压力大于附加气室,气体由主气室经阻尼孔流向附加气室,此时  $v_{s0} = 0$ ,依据式⑦求得

$$v_{sf} = \sqrt{\frac{2}{\rho}(\Delta p - \Delta p_f)} \quad (8)$$

当  $\Delta p < \Delta p_f$  时,主气室内气体压力小于附加气

室,气体由附加气室经阻尼孔流向主气室,此时  $v_{sf} = 0$ ,依据式⑦求得

$$v_{s0} = \sqrt{\frac{2}{\rho}(\Delta p_f - \Delta p)} \quad (9)$$

单位时间内流经阻尼孔的气体流量,是气体流速和与流速方向相垂直的通孔等效面积的乘积.在实际气体流动中,通孔出口的流速不是均匀的,工程中一般将流速乘以流量系数,以求得流速平均值<sup>[7]</sup>.规定由主气室流入附加气室的气体流量为正值,则根据式⑧⑨得到空气弹簧流经阻尼孔的气体流量为

$$v = \pm \frac{\pi}{4}C_s d^2 \sqrt{\frac{2}{\rho}|\Delta p - \Delta p_f|} \quad (10)$$

式中,  $C_s$  为节流孔流量系数,此处取  $C_s = 0.82^{[8]}$ .

根据伯努利方程,静止状态时簧内气体密度可表示为

$$\rho = pM_m / (RT) \quad (11)$$

式中,  $M_m$  为气体摩尔质量/ $(\text{kg} \cdot \text{mol}^{-1})$ ,气体摩尔常数  $R = 8.314 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$ ,  $T$  为开氏温度/ $\text{K}$ .

将式⑪代入⑩,可求得单位时间内流经阻尼孔的气体流量

$$\dot{v} = \pm \frac{\pi}{4}C_s d^2 \sqrt{\frac{2RT}{pM_m}|\Delta p - \Delta p_f|} \quad (12)$$

由式⑫可知,单位时间内流经阻尼孔的气体流量与两气室压力差之间呈非线性关系.因此,对式⑫进行线性化处理,构建流量与压力差之间的线性化解析式.依据假设条件,设与式⑫等价的气体流量线性解析式为

$$\lambda \dot{v} = \Delta p - \Delta p_f \quad (13)$$

式中,  $\lambda$  为比例常数.

当空气弹簧基座振动的位移是以角频率  $\omega$  正弦变化时,空气弹簧主气室橡胶囊形变量  $x$ 、流经阻尼孔气体流量  $v$  均随之以角频率  $\omega$  正弦变化,则各量可分别表示为

$$\begin{cases} Z_0(t) = a_0 \sin(\omega t) \\ x = a' \sin(\omega t + \varphi_1) \\ v = v_0 \sin(\omega t + \varphi_2) \end{cases} \quad (14)$$

式中,  $a_0$  为基座振动振幅;  $a'$  为橡胶囊挠曲振幅;  $v_0$  为流经阻尼孔气体流量振幅;  $\varphi_1, \varphi_2$  为相位差.

流经阻尼孔的气体流量在如式⑭振动过程中,采用非线性方程式⑫及线性方程式⑬计算得出一个振动周期内消耗的能量应相等.按照式⑫计算得到的一个振动周期内气体消耗的能量为

$$\int (\Delta p - \Delta p_f) dv = \int \frac{8pM_m}{\pi^2 C_s^2 d^4 RTg} (v)^2 dv =$$

$$\frac{64pM_m}{3\pi^2C_s^2d^4RTg}v_0^3\omega^2 \quad (15)$$

按照式(13)计算得到的一个振动周期内气体消耗的能量为

$$\int(\Delta p - \Delta p_f)dv = \lambda \int \dot{v}dv = \lambda \pi v_0^2 \omega \quad (16)$$

联立式(15)(16)可求得

$$\lambda = \frac{64pM_m}{3\pi^3C_s^2d^4RTg}v_0\omega \quad (17)$$

即当比例常数按照式(17)取值时,单位时间内流经阻尼孔的气体流量可按照式(13)计算.联立式(6)(13)(14),求得关于气体流量的微分方程为

$$\sigma C_t \dot{v} + v = C_t A_s a' \sin(\omega t + \varphi_1) \quad (18)$$

式中,  $C_t = \frac{V_f}{V_0 + V_f}$ ,  $\sigma = \lambda \frac{V_0}{np}$ .

### 2.3 动态刚度与阻尼的数学模型建立

求解微分方程式(18),可求得流经阻尼孔的气体流量表达式为

$$V = \frac{C_t A_s}{1 + (\sigma C_t \omega)^2} a' [\sin(\omega t + \varphi_1) - (\sigma C_t \omega) \cos(\omega t + \varphi_1)] \quad (19)$$

对比式(14)与式(19),可得

$$v_0 = \frac{C_t A_s}{\sqrt{1 + (\sigma C_t \omega)^2}} \quad (20)$$

式(19)可变化为如下形式:

$$V = \frac{C_t A_0}{1 + (\sigma C_t \omega)^2} [x - \sigma C_t \dot{x}] = \frac{C_t A_0}{1 + (\sigma C_t \omega)^2} [(Z_0(t) - Z(t)) - \sigma C_t (\dot{Z}_0(t) - \dot{Z}(t))] \quad (21)$$

联立式(2)(6)(21),可得

$$m \ddot{Z}(t) = \frac{npA_0A_s}{V_0} \frac{\sigma C_t^2}{1 + (\sigma C_t \omega)^2} [\dot{Z}_0(t) - \dot{Z}(t)] + \frac{npA_0A_s}{V_0} [1 - \frac{C_t}{1 + (\sigma C_t \omega)^2}] [Z_0(t) - Z(t)] \quad (22)$$

对于一个单自由度被动隔振系统,其动力学方程为

$$m \ddot{y} = c(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) \quad (23)$$

式(22)与式(23)形式完全相同,因此可将空气弹簧振动过程中的动态刚度  $k$  与动态阻尼  $c$  等效为

$$\begin{cases} k = \frac{npA_0A_s}{V_0} [1 - \frac{C_t}{1 + (\sigma C_t \omega)^2}] \\ c = \frac{npA_0A_s}{V_0} \frac{\sigma C_t^2}{1 + (\sigma C_t \omega)^2} \end{cases} \quad (24)$$

由式(17)~(20)可知,空气弹簧动态刚度和阻尼与主气室橡胶囊的挠曲振幅有关.假设主气室橡胶囊本身对质量块的作用力极小,质量块的加速度最大值可视为由主气室最大气压作用所产生.当主气室被瞬时压缩时,没有气体向附加气室流通,此时其腔室内压力最大,则:

$$pV_0 = (p + \Delta p_{\max})(V_0 - \Delta V_{\max}) \quad (25)$$

式中,  $\Delta V_{\max}$  为主气室内压力最大时对应的体积变化量.

整理式(25),并略去无穷小量,可推得主气室压力最大增量

$$\Delta p_{\max} = \frac{p}{V_0} \Delta V_{\max}$$

外界激励振动  $Z_0(t)$  产生的加速度最大值为  $\omega^2 a_0$ ,此时对质量块进行如下受力分析:

$$\frac{p}{V_0} \Delta V_{\max} A_0 = m \omega^2 a_0$$

设  $a'$  为主气室橡胶囊体积的变化量  $\Delta V_{\max}$  与横截面积的比值,则

$$a' = \frac{\Delta V_{\max}}{A_s} = \frac{m \omega^2 a_0}{A_0 A_s} \frac{V_0}{p}$$

为简化空气弹簧动态刚度与阻尼的解析表达式,引入参量  $H$  与  $\beta$ ,其表达式为

$$\begin{cases} H = \frac{npA_0A_s}{V_0} \\ \beta = \frac{64pM_m v_0}{3\pi^3 C_s^2 RTg} \end{cases} \quad (26)$$

其中,  $H$  是与空气弹簧初始状态相关的量,  $\beta$  是与流经阻尼孔气体流量振幅相关的量.

则空气弹簧动态刚度和阻尼的数学模型为

$$\begin{cases} k = H [1 - \frac{C_t}{1 + (\beta C_t \omega^2 / d^4)^2}] \\ c = H \frac{\beta C_t^2 \omega / d^4}{1 + (\beta C_t \omega^2 / d^4)^2} \end{cases} \quad (27)$$

由式(27)可知,空气弹簧等效动态刚度和阻尼与空气弹簧静止状态时主附气室体积、主气室几何横截面积及有效工作面积、簧内初始气体压力、阻尼孔直径等因素有关,同时动态刚度与阻尼随外界激励频率呈非线性变化.

### 3 算例

阻尼孔的直径对空气弹簧的动态性能影响显著,故以阻尼孔直径这一因素为例,分析阻尼孔直径对空气弹簧动态特性的影响.当阻尼孔的直径

$d = 0$  时,空气弹簧的刚度与阻尼分别为

$$\begin{cases} k_{d=0} = npA_0A_s/V_0 \\ c_{d=0} = 0 \end{cases} \quad (28)$$

由式(28)可知,当阻尼孔关闭时,空气弹簧的刚度仅与主气室有关,附加气室不工作. 由于气体不能经阻尼孔流通耗散能量,因此弹簧的阻尼为0. 当 $d$ 足够大( $d \gg 0$ )时,求得空气弹簧的刚度与阻尼分别为

$$\begin{cases} k_{d \gg 0} = npA_0A_s/(V_0 + V_f) \\ c_{d \gg 0} = 0 \end{cases} \quad (29)$$

由式(29)可知,由于 $d$ 足够大,附加气室与主气室等同于一个腔室,此时气室之间不会产生压力差,故没有气体流通耗散能量,在假设的理想情况下,弹簧阻尼依然为0.

当 $d$ 介于上述两种情况之间时,在同等激振振幅扫频激励下动态刚度和阻尼随 $d$ 的变化规律如图4所示.

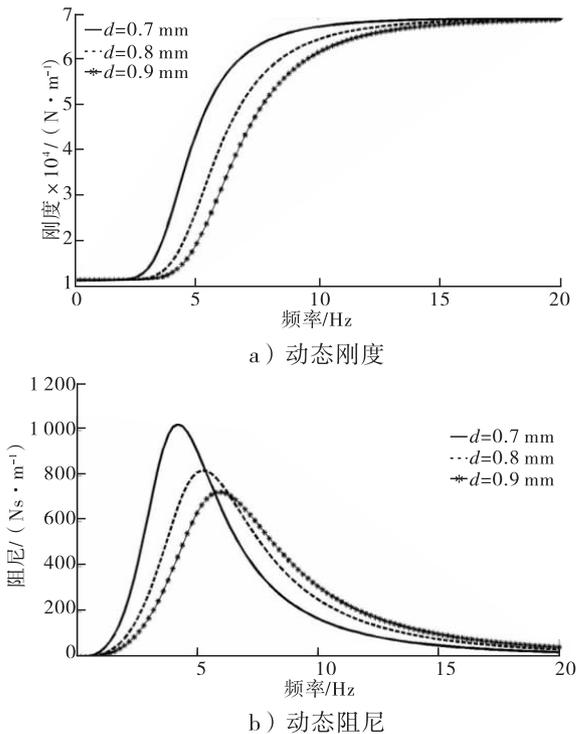


图4 动态刚度和阻尼随 $d$ 变化曲线

随着 $d$ 的增加,动态刚度整体减小,低刚度值的频带范围扩大,使空气弹簧达到高刚度值的频率增加;阻尼峰值降低,且最大阻尼所对应的频率变大. 原因是当 $d$ 增大后,气流受阻尼孔的限制作用减弱,在同等激振频率下,由主气室流入附加气室的气流量增多,主气室内气体量减少,压缩同等位移时主气室内气体分子间作用力变小,从而刚度降低. 在

此过程中,由于流入附加气室的气流量增加,两气室间的压差降低,气流以动能及内能形式消耗的能量也降低,阻尼也随之减小.

其他参数对空气弹簧动态性能的影响可以采用相同的方法进行分析,证明本文所建立的数学模型是有效的、实用的. 该数学模型对于分析各参数对空气弹簧动态特性的影响规律、合理调整空气弹簧的参数、有效隔离振动具有指导意义.

## 4 结论

本文基于某空气弹簧的结构及其工作原理,推导了空气弹簧振动的动力学方程、流经阻尼孔气体流量的微分方程,进而建立了空气弹簧动态刚度和阻尼的数学模型. 由该模型可知,空气弹簧的等效动态刚度和阻尼,其与气室体积、阻尼孔直径、簧内初始压力、等效工作面积及主气室横截面积等参数有关,同时随外界激振频率变化而变化. 以阻尼孔直径对空气弹簧动态特性的影响为例,验证了该数学模型是有效的. 本文的结论对于分析各参数对空气弹簧动态特性的影响规律、合理调整空气弹簧的参数、有效隔离振动具有指导意义. 后续研究重点是进一步分析各因素(如:激振频率、阻尼孔直径、主气室高度、簧内初始压力)对空气弹簧动态性能的影响.

## 参考文献:

- [1] 应杏娟,李郝林,倪争技. 空气弹簧振动器的动力特性研究[J]. 上海理工大学学报,2006,28(2):164.
- [2] Moon J H, Lee B G. Modeling and sensitivity analysis of a pneumatic vibration isolation system with two air chambers [J]. Mechanism and Machine Theory, 2010, 45 (12):1828.
- [3] 王家胜,朱思洪. 带附加气室空气弹簧动态刚度的线性化模型研究[J]. 振动与冲击,2009,28(2):72.
- [4] Erin C, Wilson B, Zapfe J. An improved model of a pneumatic vibration isolator; theory and experiment [J]. Journal of Sound and Vibration, 1998, 218 (1):81.
- [5] Lee J H, Kim K J. Modeling of nonlinear complex stiffness of dual-chamber pneumatic spring for precision vibration isolations [J]. Journal of Sound and Vibration, 2007, 301 (3-5):909.
- [6] 张学学,李桂馥. 热工基础[M]. 北京:高等教育出版社,2000.
- [7] 王新月. 气体动力学基础[M]. 西安:西北工业大学出版社,2006.
- [8] 承颖璐. 柔性隔振系统的功率流传递特性与控制研究[D]. 上海:上海交通大学,2009.