文章编号:2095-476X(2015)3/4-0152-05

广义 Boussinesq 方程的精确行波解研究

景书杰, 赵建卫, 王世磊

(河南理工大学 数学与信息科学学院, 河南 焦作 454000)

摘要:利用辅助函数法,把广义 Boussinesq 方程转化为代数方程组进行求解,并运用 Maple 软件计算得出非线性广义 Boussinesq 方程的10组精确行波解,解的形式丰富多样;利用该解题思路还可以求解推广的 KdV 方程和耦合的薛定谔方程的精确行波解.

关键词:辅助函数法;广义 Boussinesq 方程;精确行波解

中图分类号:O224　　**文献标志码**:A　　**DOI**:10.3969/j.issn.2095-476X.2015.3/4.032

Study on the exact travelling wave solution of the generalized Boussinesq equation

JING Shu-jie, ZHAO Jian-wei, WANG Shi-lei

(*Mathematics and Information Science Academy*, *He'nan Polytechnic University*, *Jiaozuo* 454000, *China*)

Abstract: The auxiliary functions method was used to solve the generalized Boussinesq equations by transforming them into solving the algebraic equations. By the further application of the Maple software, ten exact travelling wave solutions of nonlinear generalized Boussinesq equation were gotten, which were abundant. Besides, the exact travelling wave solutions of the generalized KdV equations and the nonlinear coupled Schrodinger system will be gotten in this way.

Key words: auxiliary functions method; generalized Boussinesq equation; exact travelling wave solution

0 引言

广义 Boussinesq 方程是物理学中描述规则波和不规则波在复杂地形上发生折射、绕射和反射等效应的非常重要的数学模型,很多学者都对它进行了研究:C. J. Bai 等[1]应用扩展双曲函数法得到了6组精确解;P. A. Clarkson 等[2-3]给出了由 W. G. Zhang 等[4-5]提出的由弹性棒产生的纵波传播的非线性模型在 $p=1,2,4$ 时的孤立波解;A. Park[6]也研究了此类方程的孤立波解和显式解;J. B. Li 等[7]运用分支方法得到几组孤立波解和扭波解;而 D. Kaya[5]运用 Adomian 分解法也求出此类方程的一个孤立波解;M. Rafei 等[8]运用同伦扰动的方法求出了此类方程的一个近似解. 在此类研究的基础上,本文将利用辅助函数法,给出广义 Boussinesq 方程的精确行波解.

1 研究方案

给定一个方程

$$F(x,t,u,u_t,u_x,u_{xx},\cdots)=0 \quad ①$$

其中,F 是已知函数,$u=u(x,t)$ 是待求函数. 方程①的精确行波解的定义为:如果某个用解析表达式表达的函数 $u=u(x,t)=u(\xi)$ 使方程①成为恒等式,其中 $\xi=bx+ct$,则称 u 是方程①的精确行

收稿日期:2015-03-07

基金项目:国家自然科学基金项目(10671057)

作者简介:景书杰(1965—),男,河南省长垣县人,河南理工大学教授,主要研究方向为优化理论.

波解.

这里,以一个简单的 KdV 方程

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad ②$$

为例,研究行波解的求法.

作行波变换 $\xi = ax + bt$,则原偏微分方程解的形式可设为 $u = u(\xi)$. 由此可得

$$u_t = bu' \qquad u_x = au' \qquad u_{xxx} = a^3 u'''$$

将其代入方程 ②,可得

$$bu' + 6auu' + a^3 u''' = 0 \quad ③$$

设

$$u = \sum_{i=0}^{n} k_i f^i(\xi) = k_0 + k_1 f(\xi) + \cdots + k_n f^n(\xi)$$

其中 f 满足

$$f' = \sqrt{\sum_{k=0}^{4} c_k f^k} \quad ④$$

由齐次平衡思想可知,③ 式中的非线性项 $6auu'$ 应与最高阶导数项 a^3u''' 中 f 的次数相等,故可得

$$n + n + 1 = n + 3$$

因而 $n = 2$. 由此可得

$$\begin{cases} u = k_0 + k_1 f(\xi) + k_2 f^2(\xi) \\ u' = k_1 f' + 2k_2 ff' \\ u'' = k_1 f'' + 2k_2[ff'' + (f')^2] \end{cases} \quad ⑤$$

由 ④ 式可知

$$(f')^2 = c_0 + c_1 f + c_2 f^2 + c_3 f^3 + c_4 f^4$$

两边求导,得到

$$2f'f'' = c_1 f' + 2c_2 ff' + 3c_3 f^2 f' + 4c_4 f^3 f'$$

等式两边约掉 f',从而得到

$$2f'' = c_1 + 2c_2 f + 3c_3 f^2 + 4c_4 f^3 \quad ⑥$$

将 ④ 式和 ⑥ 式代入 ⑤ 式,得到

$$u'' = l_0 + l_1 f + l_2 f^2 + l_3 f^3 + l_4 f^4$$

从而有

$$u''' = l_1 f' + 2l_2 ff' + 3l_3 f^2 f' + 4l_4 f^3 f'$$

其中,$l_i(i = 0,1,\cdots,4)$ 是与 $c_i(i = 0,1,\cdots,4)$ 和 $k_i(i = 0,1,2)$ 相关的常数,将 u',uu' 和 u''' 代入 ③ 式得出的是关于 f',ff',f^2f' 和 f^3f' 的等式,因为它们线性无关,所以其系数必须为零,进而得到关于 $c_i(i = 0,1,\cdots,4)$ 与 $k_i(i = 0,1,2)$ 的代数方程组,求其解,再利用方程 ④ 解的形式,就可解出 u.

2　求解过程

对广义 Boussinesq 方程

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + p\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 u + q\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + r\frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} - s\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0$$

即

$$(p^2 + q)u_{xx} + u_{tt} + 2pu_{xt} + 2ru_x^2 + 2ruu_{xx} - su_{xxxx} = 0 \quad ⑦$$

假设 $u = u(\xi)$,其中 $\xi = ax + bt$,则

$$u_t = bu' \qquad u_x = au' \qquad u_{xx} = a^2 u''$$
$$u_{tt} = b^2 u'' \qquad u_{xt} = abu'' \qquad u_{xxxx} = a^4 u^{(4)} \quad ⑧$$

将 ⑧ 式代入 ⑦ 式得到

$$(p^2 + q)a^2 u'' + b^2 u'' + 2pabu'' + 2ra^2(u')^2 + 2ra^2 uu'' - sa^4 u^{(4)} = 0 \quad ⑨$$

设

$$u = \sum_{i=0}^{n} k_i f^i(\xi) = k_0 + k_1 f(\xi) + \cdots + k_n f^n(\xi) \quad ⑩$$

其中 f 满足 ④ 式.

由齐次平衡思想可知,非线性项 $2ra^2uu''$ 应与最高阶导数项 $sa^4u^{(4)}$ 中 f 的次数相等,可得 $n + n + 2 = n + 4$,从而 $n = 2$. 于是,⑩ 式可写为

$$u = k_0 + k_1 f(\xi) + k_2 f^2(\xi) \quad ⑪$$

则有

$$u' = k_1 f' + 2k_2 ff' \quad ⑫$$

$$u'' = k_1 f'' + 2k_2[ff'' + (f')^2] \quad ⑬$$

由 ④ 式可得 $(f')^2 = c_0 + c_1 f + c_2 f^2 + c_3 f^3 + c_4 f^4$,两边求导,得到

$$2f'f'' = c_1 f' + 2c_2 ff' + 3c_3 f^2 f' + 4c_4 f^3 f'$$

从而

$$2f'' = c_1 + 2c_2 f + 3c_3 f^2 + 4c_4 f^3 \quad ⑭$$

将 ④⑭ 式代入 ⑬ 式,得到

$$u'' = \left(\frac{1}{2}k_1c_1 + 2k_2c_0\right) + (k_1c_2 + 3k_2c_1)f + \left(\frac{3}{2}k_1c_3 + 4k_2c_2\right)f^2 + (2k_1c_4 + 5k_2c_3)f^3 + 6k_2c_4f^4 = l_0 + l_1 f + l_2 f^2 + l_3 f^3 + l_4 f^4 \quad ⑮$$

其中,$l_0 = \frac{1}{2}k_1c_1 + 2k_2c_0$,$l_1 = k_1c_2 + 3k_2c_1$,$l_2 = \frac{3}{2}k_1c_3 + 4k_2c_2$,$l_3 = 2k_1c_4 + 5k_2c_3$,$l_4 = 6k_2c_4$.

另一方面,由 ⑫ 式可得

$$(u')^2 = k_1^2c_0 + (k_1^2c_1 + 4k_1k_2c_0)f + (k_1^2c_2 + 4k_1k_2c_1 + 4k_2^2c_0)f^2 + (k_1^2c_3 + 4k_1k_2c_2 + 4k_2^2c_1)f^3 + (k_1^2c_4 + 4k_1k_2c_3 + 4k_2^2c_2)f^4 + (4k_1k_2c_4 + 4k_2^2c_3)f^5 + 4k_2^2c_4f^6 \quad ⑯$$

$$u^{(4)} = \left(\frac{1}{2}l_1c_1 + 2l_2c_0\right) + (l_1c_2 + 3l_2c_1 + 6l_3c_0)f + \left(\frac{3}{2}l_1c_3 + 4l_2c_2 + \frac{15}{2}l_3c_1 + 12l_4c_0\right)f^2 +$$

$$(2l_1c_4+5l_2c_3+9l_3c_3+14l_4c_1)f^3+$$
$$\left(6l_2c_4+\frac{21}{2}l_3c_3+16l_4c_2\right)f^4+$$
$$(12l_3c_4+18l_4c_3)f^5+20l_4c_4f^6 \qquad ⑰$$

将 ⑮⑯⑰ 式代入 ⑨ 式,得到

$$(p^2a^2+qa^2+b^2+2pab)l_0+$$
$$2ra^2k_1{}^2c_0+2ra^2k_0l_0-sa^4\left(\frac{1}{2}l_1c_1+2l_2c_0\right)+$$
$$[(p^2a^2+qa^2+b^2+2pab)l_1+$$
$$2ra^2(k_1{}^2c_1+4k_1k_2c_0)+2ra^2(k_0l_1+k_1l_0)-$$
$$sa^4(l_1c_2+3l_2c_1+6l_3c_0)]f+$$
$$[(p^2a^2+qa^2+b^2+2pab)l_2+$$
$$2ra^2(k_1{}^2c_2+4k_1k_2c_1+4k_2^2c_0)+$$
$$2ra^2(k_0l_2+k_1l_1+k_2l_0)-$$
$$sa^4\left(\frac{3}{2}l_1c_3+4l_2c_2+\frac{15}{2}l_3c_1+12l_4c_0\right)]f^2+$$
$$[(p^2a^2+qa^2+b^2+2pab)l_3+$$
$$2ra^2(k_1{}^2c_3+4k_1k_2c_2+4k_2{}^2c_1)+$$
$$2ra^2(k_0l_3+k_1l_2+k_2l_1)-$$
$$sa^4(2l_1c_4+5l_2c_3+9l_3c_2+14l_4c_1)]f^3+$$
$$[(p^2a^2+qa^2+b^2+2pab)l_4+$$
$$2ra^2(k_1{}^2c_4+4k_1k_2c_3+4k_2{}^2c_2)+$$
$$2ra^2(k_0l_4+k_1l_3+k_2l_2)-$$
$$sa^4(6l_2c_4+\frac{21}{2}l_3c_3+16l_4c_2)]f^4+$$
$$[2ra^2(4k_1k_2c_4+4k_2{}^2c_3)+$$
$$2ra^2(k_1l_4+k_2l_3)-sa^4(12l_3c_4+18l_4c_3)]f^5+$$
$$[2ra^2(4k_2{}^2c_4)+2ra^2k_2l_4-sa^4(20l_4c_4)]f^6=0$$

由于 $1,f,f^2,f^3,f^4,f^5$ 与 f^6 线性无关,所以各项系数均为 0. 经化简,并令

$$\frac{p^2a^2+qa^2+b^2+2pab}{sa^4}=A \qquad \frac{r}{sa^2}=B \qquad ⑱$$

从而得到

$$A\left(\frac{1}{2}k_1c_1+2k_2c_0\right)+B(2k_1{}^2c_0+k_0k_1c_1+4k_0k_2c_0)=$$
$$\frac{1}{2}k_1c_1c_2+\frac{3}{2}k_2c_1{}^2+3k_1c_0c_3+8k_2c_0c_2$$
$$A(k_1c_2+3k_2c_1)+B(3k_1{}^2c_1+2k_0k_1c_2+$$
$$6k_0k_2c_1+12k_1k_2c_0)=$$
$$k_1c_2{}^2+15k_2c_1c_2+\frac{9}{2}k_1c_1c_3+12k_1c_0c_4+30k_2c_0c_3$$
$$A\left(\frac{3}{2}k_1c_3+4k_2c_2\right)+B(4k_1{}^2c_2+15k_1k_2c_1+$$
$$12k_2{}^2c_0+3k_0k_1c_3+8k_0k_2c_2)=$$
$$\frac{15}{2}k_1c_2c_3+42k_2c_1c_3+16k_2c_2{}^2+15k_1c_1c_4+72k_2c_0c_4$$
$$A(2k_1c_4+5k_2c_3)+B(5k_1{}^2c_3+18k_1k_2c_2+$$
$$14k_2{}^2c_1+4k_0k_1c_4+10k_0k_2c_3)=$$
$$20k_1c_2c_4+90k_2c_1c_4+\frac{15}{2}k_1c_3{}^2+65k_2c_2c_3$$
$$6Ak_2c_4+B(6k_1{}^2c_4+21k_1k_2c_3+16k_2{}^2c_2+12k_0k_2c_4)=$$
$$30k_1c_3c_4+120k_2c_2c_4+\frac{105}{2}k_2c_3{}^2$$
$$B(24k_1k_2c_4+18k_2{}^2c_3)=24k_1c_4{}^2+168k_2c_3c_4$$
$$20Bk_2{}^2c_4=120k_2c_4{}^2$$

以上公式联立,利用 Maple 软件计算可得以下四组解:

1) $k_1=0,k_2=0,k_0$ 和 $c_i(i=0,1,\cdots,4)$ 为任意常数;

2) $k_2=0,c_4=0,c_3=\dfrac{2Bk_1}{3},c_2=A+2Bk_0,c_0,c_1,k_0$ 和 k_1 为任意常数;

3) $c_0=c_1=c_2=c_3=c_4=0,k_i(i=0,1,2)$ 为任意常数;

4) $k_0=\dfrac{16c_2c_4-4Ac_4-3c_3{}^2}{8Bc_4},k_1=\dfrac{3c_3}{B},k_2=\dfrac{6c_4}{B},c_1=\dfrac{c_3(4c_2c_4-c_3{}^2)}{8c_4{}^2},c_0,c_2$ 和 c_3 为任意常数,c_4,a 和 b 为非零任意常数.

由于 k_2 不可以为 0,故解 1),2) 应舍去;且在取解 3) 时,函数 f 为 0,不可取,因此,只有解 4) 符合情况.

下面分 10 种情况讨论函数 f,进而利用 ⑪ 式得出所求函数 u.

1) 当 $c_0=0,c_2>0,c_3=0,c_4<0$ 时,$c_1=0$,④ 式有解 $f=\sqrt{-\dfrac{c_2}{c_4}}\mathrm{sech}(\sqrt{c_2}\xi)$,此时,$k_0=\dfrac{4c_2-A}{2B}$,$k_1=0,k_2=\dfrac{6c_4}{B}$,从而可得

$$u=\frac{4c_2-A}{2B}-\frac{6c_2}{B}\mathrm{sech}^2(\sqrt{c_2}(ax+bt)) \qquad ⑲$$

2) 当 $c_0=\dfrac{c_2{}^2}{4c_4},c_2<0,c_3=0,c_4>0$ 时,$c_1=0$,④ 式有解 $f=\sqrt{-\dfrac{c_2}{2c_4}}\tanh\left(\sqrt{-\dfrac{c_2}{2}}\xi\right)$,此时,$k_0=\dfrac{4c_2-A}{2B},k_1=0,k_2=\dfrac{6c_4}{B}$,从而可得

$$u=\frac{4c_2-A}{2B}-\frac{3c_2}{B}\tanh^2\left(\sqrt{-\frac{c_2}{2}}(ax+bt)\right)$$

3)当 $c_0=0,c_2<0,c_3=0,c_4>0$ 时,$c_1=0$,④式有解 $f=\sqrt{-\frac{c_2}{c_4}}\sec(\sqrt{-c_2}\xi)$, 此时,$k_0=\frac{4c_2-A}{2B},k_1=0,k_2=\frac{6c_4}{B}$,从而可得

$$u=\frac{4c_2-A}{2B}-\frac{6c_2}{B}\sec^2(\sqrt{-c_2}(ax+bt))$$

4)当 $c_0=\frac{c_2^2}{4c_4},c_2>0,c_3=0,c_4>0$ 时,$c_1=0$,④式有解 $f=\sqrt{\frac{c_2}{2c_4}}\tan\left(\sqrt{\frac{c_2}{2}}\xi\right)$,此时 $k_0=\frac{4c_2-A}{2B}$,$k_1=0,k_2=\frac{6c_4}{B}$,从而可得

$$u=\frac{4c_2-A}{2B}+\frac{3c_2}{B}\tan^2\left(\sqrt{\frac{c_2}{2}}(ax+bt)\right) \quad ⑳$$

5)当 $c_0=0,c_2=0,c_3=0,c_4>0$ 时,$c_1=0$,④式有解 $f=-\frac{1}{\sqrt{c_4}\xi}$,此时,$k_0=-\frac{A}{2B},k_1=0,k_2=\frac{6c_4}{B}$,从而可得

$$u=-\frac{A}{2B}+\frac{6}{B(ax+bt)^2}$$

6)当 $c_0=-\frac{c_2{}^2m^2(1-m^2)}{c_4(2m^2-1)},c_2>0,c_3=0,c_4<0$ 时,$c_1=0$,④式有解

$$f=\sqrt{-\frac{c_2m^2}{c_4(2m^2-1)}}cn\left(\sqrt{\frac{c_2}{2m^2-1}}\xi,m\right)$$

此时,$k_0=\frac{4c_2-A}{2B},k_1=0,k_2=\frac{6c_4}{B}$,从而可得

$$u=\frac{4c_2-A}{2B}-\frac{6c_2m^2}{B(2m^2-1)}cn^2\left(\sqrt{\frac{c_2}{2m^2-1}}(ax+bt),m\right)$$

7)当 $c_0=-\frac{c_2^2(1-m^2)}{c_4(2-m^2)^2},c_2>0,c_3=0,c_4<0$ 时,$c_1=0$,④式有解

$$f=\sqrt{-\frac{c_2}{c_4(2-m^2)}}dn\left(\sqrt{\frac{c_2}{2-m^2}}\xi,m\right)$$

此时,$k_0=\frac{4c_2-A}{2B},k_1=0,k_2=\frac{6c_4}{B}$,从而可得

$$u=\frac{4c_2-A}{2B}-\frac{6c_2}{B(2-m^2)}dn^2\left(\sqrt{\frac{c_2}{2-m^2}}(ax+bt),m\right)$$

8)当 $c_0=-\frac{c_2^2m^2}{c_4(m^2+1)^2},c_2<0,c_3=0,c_4>0$ 时,$c_1=0$,④式有解

$$f=\sqrt{-\frac{c_2m^2}{c_4(m^2+1)}}sn\left(\sqrt{-\frac{c_2}{m^2+1}}\xi,m\right)$$

此时,$k_0=\frac{4c_2-A}{2B},k_1=0,k_2=\frac{6c_4}{B}$,从而可得

$$u=\frac{4c_2-A}{2B}-\frac{6c_2m_2}{B(m^2+1)}sn^2\left(\sqrt{-\frac{c_2}{m^2+1}}(ax+bt),m\right)$$

9)当 $c_0=0,c_3(4c_2c_4-c_3{}^2)=0,c_2<0,c_4>0$ 时,④式有解

$$f=-\frac{c_2\sec^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{-c_2}\xi\right)}{2\sqrt{-c_2c_4}\tan\left(\frac{1}{2}\sqrt{-c_2}\xi\right)+c_3}$$

此时,$k_0=\frac{16c_2c_4-4Ac_4-3c_3{}^2}{8Bc_4},k_1=\frac{3c_3}{B},k_2=\frac{6c_4}{B}$,从而可得

$$u=\frac{16c_2c_4-4Ac_4-3c_3{}^2}{8Bc_4}-\frac{3c_2c_3\sec^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{-c_2}(ax+bt)\right)}{2B\sqrt{-c_2c_4}\tan\left(\frac{1}{2}\sqrt{-c_2}(ax+bt)\right)+c_3B}+\frac{6c_4}{B}\frac{c_2{}^2\sec^4\left(\frac{1}{2}\sqrt{-c_2}(ax+bt)\right)}{\left(2\sqrt{-c_2c_4}\tan\left(\frac{1}{2}\sqrt{-c_2}(ax+bt)\right)+c_3\right)^2}$$

10)当 $c_0=0,c_3(4c_2c_4-c_3{}^2)=0,c_2>0,c_4>0$ 时,④式有解

$$f=-\frac{c_2\mathrm{sech}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{c_2}\xi\right)}{2\sqrt{c_2c_4}\tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{c_2}\xi\right)+c_3}$$

此时,$k_0=\frac{16c_2c_4-4Ac_4-3c_3{}^2}{8Bc_4},k_1=\frac{3c_3}{B},k_2=\frac{6c_4}{B}$,从而可得

$$u=\frac{16c_2c_4-4Ac_4-3c_3{}^2}{8Bc_4}-\frac{3c_2c_3\mathrm{sech}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{c_2}(ax+bt)\right)}{2B\sqrt{c_2c_4}\tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{c_2}(ax+bt)\right)+c_3B}+\frac{6c_4}{B}\frac{c_2{}^2\mathrm{sech}^4\left(\frac{1}{2}\sqrt{c_2}(ax+bt)\right)}{\left(2\sqrt{c_2c_4}\tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{c_2}(ax+bt)\right)+c_3\right)^2}$$

以上各种情况中,A,B 的取值见 ⑱ 式. 经验证,这些解全部是 ⑦ 式的解.

在 ⑲ 式中,取 $c_2 = 1, a = 1, b = 1, r = 1, s = 1, p = 1, q = 2$,可得

$$u = -1 - 6\operatorname{sech}^2(x + t)$$

利用 Maple,可画出在 $-8 \leqslant x \leqslant 5, 0 \leqslant t \leqslant 5$ 时的图形,即孤立波解,波形见图 1;在 ⑳ 式中,取 $c_2 = 2, a = 1, b = 1, r = 1, s = 1, p = 1, q = 2$,可得

$$u = 1 + 6\tanh^2(x + t)$$

利用 Maple,可画出其在 $-3 \leqslant x \leqslant 3, 0 \leqslant t \leqslant 6$ 时的图形,即行波解,波形见图 2. 对于其他情况解的图形,这里不作研究.

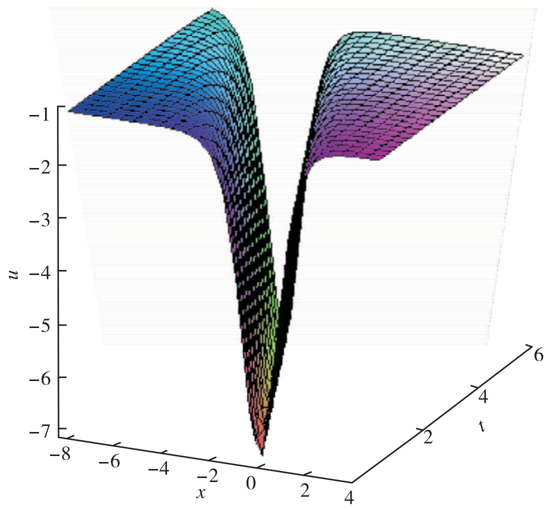

图 1 孤立波解波形图

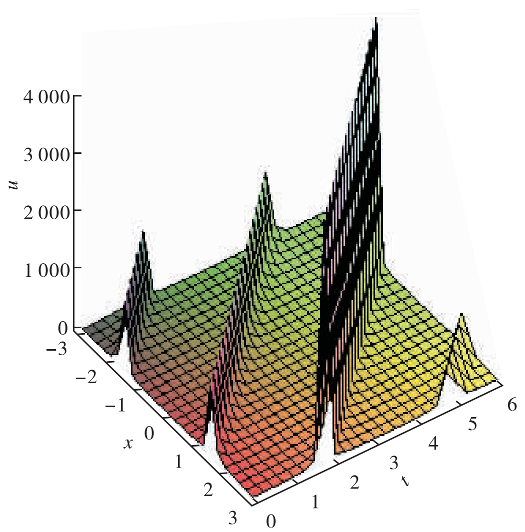

图 2 行波解波形图

3 结语

本文利用辅助函数法,对广义 Boussinesq 方程的精确行波解进行研究,得到了非线性广义 Boussinesq 方程的 10 组精确行波解,其中解的形式丰富多样,有三角函数、双曲函数、雅克比椭圆函数和有理函数等. 另外,经过验证,利用本文的解题思路还可以求解推广的 KdV 方程和耦合的薛定谔方程的精确行波解,并且同样能够得到形式丰富的解.

参考文献:

[1] Bai C J, Zhao H. A New rational algebraic approach to find exact analytical solutions to a (2+1)-dimensional system[J]. Commun Theor Phys, 2007, 48(5): 801.

[2] Clarkson P A, Leveque R J, Saxton R. Solitary wave interactions in elastic rod[J]. Stud Appl Math, 1986, 75: 95.

[3] Bogolubsky I L. Some examples of inelastic solution interaction[J]. Comput Phys Commun, 1977(13): 149.

[4] Zhang W G, Chang Q S, Fan E G. Methods of judging shape of solitary wave and solution formulae for some evolution equations with nonlinear terms of high order [J]. J Math Anal Appl, 2003, 287: 1.

[5] Kaya D. The exact and numerical solitary-wave solutions for generalized modified Boussinesq equation[J]. Phys Let A, 2006, 348: 244.

[6] Parker A. On exact solutions of the regularied long-wave equation: A direct approach to partially integrable equation. 1. solitary wave and solutions[J]. J Math Phys, 1995, 36: 3498.

[7] Li J B, Zhang L J. Bifurcations of traveling wave solutions in generalized Pochhammer-Chree equation[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2002(14): 581.

[8] Rafei M, Ganji D D, Mohammadi Daniali H R, et al. Application of homotopy perturbation method to the RLM and generalized modified Boussinesq equations[J]. Phys Lett A, 2007, 364: 1.

[9] 李画眉,林机,许友生. 两组新的广义 Ito 方程组的多种行波解[J]. 物理学报, 2004, 53(2): 349.

[10] 套格图桑. 构造非线性发展方程无穷序列复合型精确解的一种方法[J]. 物理学报, 2011, 60(1): 010202.