轻工学报 2016年11月 第31卷 第6期
JOURNAL OF LIGHT INDUSTRY Vol. 31 No. 6 Nov. 2016

引用格式:赵美娜,张树义,郑晓迪. 一类算子方程迭代序列的稳定性[J]. 轻工学报,2016,31(6):100-108.
中图分类号:O177.91 文献标识码:A
DOI:10.3969/j.issn.2096-1553.2016.6.015
文章编号:2096-1553(2016)06-0100-09

一类算子方程迭代序列的稳定性

Stability of iterative sequences for a class of operators equation

赵美娜[1], 张树义[1], 郑晓迪[2]
ZHAO Mei-na[1], ZHANG Shu-yi[1], ZHENG Xiao-di[2]

1. 渤海大学 数理学院,辽宁 锦州 121013;
2. 锦州师范高等专科学校 计算机系,辽宁 锦州 121001
1. *College of Mathematics and Physics, Bohai University, Jinzhou* 121013, *China*;
2. *Department of Computer, Jinzhou Teachers Training College, Jinzhou* 121001, *China*

关键词:
k-次增生算子;T-稳定性;带误差的Ishikawa迭代序列

Key words:
k-subaccretive operator; T-stability; Ishikawa iterative sequences with error

摘要:在实Banach空间中研究Lipschitz的k-次增生算子方程$x+Tx=f$解的带误差的Ishikawa迭代序列稳定性问题,并给出$\{y_n\}$收敛到方程$x+Tx=f$的唯一解q的估计式,从而推广和改进了文献中的相应结果.

收稿日期:2016-07-06
基金项目:国家自然科学基金项目(11371070)
作者简介:赵美娜(1990—),女,辽宁省葫芦岛市人,渤海大学硕士研究生,主要研究方向为非线性泛函分析.
通信作者:张树义(1960—),男,辽宁省锦州市人,渤海大学教授,主要研究方向为非线性泛函分析.

Abstract: Stability problems of Ishikawa iterative sequences with error for Lipschitz $k-$ subaccretive operators equation were studied in real Banach space. A general estimate formula of the unique solution q that $\{y_n\}$ converged to the equation $x+Tx=f$ was given, which extended and improved the corresponding results in some references.

0 引言

非线性算子不动点理论作为泛函分析的重要组成部分,被广泛应用于微分方程、积分方程、优化理论、数学规划问题等许多领域, 而非线性算子不动点迭代算法的研究已成为近些年来学术界所研究的最活跃的课题之一. 关于 $k-$次增生算子方程解的迭代逼近问题的研究得到了许多学者的关注[1-8]. 近些年来, 文献[9-21]研究了一些非线性映象不动点的存在性与迭代逼近. 受上述工作启发, 本文在文献[6]的基础上研究 $k-$次增生算子方程 $x+Tx=f$ 和 $k-$次散逸算子方程 $x-\lambda Tx=f$ 解的带误差的 Ishikawa 迭代序列的稳定性问题,并给出$\{y_n\}$收敛到方程 $x+Tx=f$ 的唯一解 q 新的收敛率估计式,以期对已知结果作一些推广和改进.

1 预备知识

引理 1 设非负实数列$\{a_n\}$ 满足$a_{n+1}\leqslant(1-t_n)a_n+b_n$, $\forall n\geqslant n_0$,其中 n_0 是某一正整数, $t_n\in[0,1]$, $\sum_{n=0}^{\infty}t_n=\infty$, $\sum_{n=0}^{\infty}b_n=\infty$,则 $a_n\to0(n\to\infty)$.

设 X 是实 Banach 空间,X^* 为 X 的对偶空间,$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 X 与 X^* 之间的广义对偶对. 正规对偶映象 $J:X\to2^{X^*}$ 定义为 $J(x)=\{f\in X^*:\langle x,f\rangle=\|x\|^2=\|f\|^2\}$.

设算子 $T:X\to X$, 称 T 是 $k-$次增生的,如果对任意 $x,y\in X$,存在$j(x-y)\in J(x-y)$ 和常数 $k\in(-\infty,+\infty)$,使$\langle Tx-Ty,j(x-y)\rangle\geqslant k\|x-y\|^2$. 如果 $k=0$,则称 T 是增生的. 如果 $k>0$,则称 T 是强增生的.

熟知 T 是增生的当且仅当 $\forall x,y\in X$ 及 $\forall\gamma>0$,有$\|x-y\|\leqslant\|x-y+\gamma(Tx-Ty)\|$.

称 T 是 $k-$次散逸算子, 如果 $-T$ 是 $k-$次增生的. 对任意 $x_0\in X$, $\{x_n\}$ 是由 $x_{n+1}=g(T,x_n)(n\geqslant0)$ 定义的迭代序列. 集合 $F(T)=\{x\in X:Tx=x\}\neq\varphi$ 且$\{x_n\}$ 收敛于$q\in F(T)$, 设$\{y_n\}$ 是 X 中的任意序列,记$\sigma_n=\|y_{n+1}-g(T,y_n)\|$,如果$\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n<+\infty$,有 $y_n\to q(n\to\infty)$,则称迭代过程 $x_{n+1}=g(T,x_n)$ 是几乎 $T-$稳定的.

全文设 N 表示正整数集,$T:X\to X$ 是 Lipschitz 连续 $k-$次增生算子, 对任意 $x_0,f\in X$, $\{\alpha_n\}_{n\geqslant0}$ 和$\{\beta_n\}_{n\geqslant0}$ 为$[0,1]$ 中的两个实数列, $\{u_n\}_{n\geqslant0}$ 和 $\{v_n\}_{n\geqslant0}$ 为 X 中的序列且满足 $\sum_{n=0}^{\infty}\|u_n\|<\infty$, $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\|v_n\|<\infty$,序列$\{x_n\}_{n\geqslant0}\subset X$,是由下列具有误差的 Ishikawa 迭代序列生成的:

$$\begin{cases}x_{n+1}=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_n(f-Tz_n)+u_n\\ z_n=(1-\beta_n)x_n+\beta_n(f-Tx_n)+v_n\qquad n\geqslant0\end{cases}\qquad ①$$

2　主要结果

定理 1　设 T 是 Lipschitz 连续 k − 次增生算子($-1 < k < 1$),$\{\alpha_n\}$,$\{\beta_n\}$ 是$[0,1]$中的实数列,满足下列条件:

i) $\limsup\limits_{n\to\infty}\alpha_n = \varepsilon_1 < \dfrac{1+k}{2L^3+4L^2+2L+1}$,$\limsup\limits_{n\to\infty}\beta_n = \varepsilon_2 < \dfrac{1+k}{2L^3+4L^2+2L+1}$;

ii) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n = \infty$.

设 $\varepsilon_3 = \max\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$, 任意取定 $\varepsilon_0 \in \left(\varepsilon_3,\dfrac{1+k}{2L^3+4L^2+2L+1}\right)$,设$\{y_n\}$是 X 中的任意序列,令

$$\sigma_n = \|y_{n+1} - (1-\alpha_n)y_n - u_n - \alpha_n(f - Tw_n)\|$$
$$w_n = (1-\beta_n)y_n + \beta_n(f - Ty_n) + v_n \qquad \forall n \geqslant 0$$

其中$\{u_n\}_{n\geqslant 0}$和$\{v_n\}_{n\geqslant 0}$为 X 中的序列且满足 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\|u_n\| < \infty$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n\|v_n\| < \infty$,若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sigma_n < \infty$,则下列结论成立:

Ⅰ) 由式①定义的带误差的 Ishikawa 迭代序列$\{x_n\}$强收敛到方程 $x + Tx = f$ 的唯一解 q.

Ⅱ) $y_n \to q(n\to\infty)$,即序列$\{x_n\}$关于方程 $x + Tx = f$ 是几乎 T − 稳定的,且存在 $N_0 \in N$ 和非负序列$\{A_n\}$,满足 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}A_n < \infty$,以及实数 $\varepsilon \in (0, 1 + k - \varepsilon_0(2L^2+2L+1)]$,使 $\forall n \geqslant N_0$,有估计

$$\|y_{n+1} - q\| \leqslant \begin{cases} \prod\limits_{j=N_0}^{n}\left(1 - \dfrac{\varepsilon\alpha_j}{1+k}\right)\|y_{N_0} - q\| + \sum\limits_{j=N_0}^{n}(\varepsilon_j + A_j)\prod\limits_{j=N_0}^{n}\left(1 - \dfrac{\varepsilon\alpha_j}{1+k}\right) & 0 < k < 1 \\ \prod\limits_{j=N_0}^{n}(1 - \varepsilon\alpha_j)\|y_{N_0} - q\| + \sum\limits_{j=N_0}^{n}\left(\varepsilon_j + \dfrac{A_j}{1+k}\right)\prod\limits_{j=N_0}^{n}(1 - \varepsilon\alpha_j) & -1 < k \leqslant 0 \end{cases}$$

特别地, 若取 $\alpha_n = \begin{cases} \dfrac{2}{n+1} & 0 < k < 1 \\ \dfrac{2}{(n+1)(1+k)} & -1 < k \leqslant 0 \end{cases}$,$\beta_n = 0(\forall_n \geqslant 0)$,则存在

$$N_1 = \max\left\{\frac{4L(L+1)}{1+k} - 1, \frac{4L(L+1)}{(1+k)^2} - 1\right\} \in N \qquad \forall n \geqslant N_1$$

有

$$\|y_{n+1} - q\| \leqslant \begin{cases} \dfrac{N_1}{n+1}\left\{\|y_{N_1} - q\| + \sum\limits_{j=N_1}^{n}(\varepsilon_j + A_j)\right\} & 0 < k < 1 \\ \dfrac{N_1}{n+1}\left\{\|y_{N_1} - q\| + \sum\limits_{j=N_1}^{n}\left(\varepsilon_j + \dfrac{A_j}{1+k}\right)\right\} & -1 < k \leqslant 0 \end{cases}$$

证明　由文献[6]知结论, Ⅰ) 成立,下面证明 Ⅱ) 成立. 令 $Sx = f - Tx$, $\forall x \in X$,显然 q 是 S 的唯一不动点,并且 S 与 T 有相同的 Lipschitz 常数 L. 记 $p_n = (1-\alpha_n)y_n + \alpha_n Sw_n + u_n$,则容易推得下列估计式成立:

$$\|y_{n+1} - q\| \leqslant \|p_n - q\| + \sigma_n \leqslant \frac{1-\alpha_n}{1+k\alpha_n}\|y_n - q\| + \frac{\alpha_n}{1+k\alpha_n}\|Sp_n - Sw_n\| + \frac{\|u_n\|}{1+k\alpha_n} + \sigma_n \qquad ②$$

$$\|w_n - q\| \leqslant (1-\beta_n)\|y_n - q\| + \beta_n\|Sy_n - q\| + \|v_n\| \leqslant (1-\beta_n+L\beta_n)\|y_n - q\| + \|v_n\|$$

$$\|y_n - Sw_n\| \leqslant \|y_n - q\| + L\|w_n - q\| \leqslant (1+L+L(L-1)\beta_n)\|y_n - q\| + L\|v_n\|$$

$$\|Sp_n - Sw_n\| \leqslant L\|(1-\alpha_n)y_n + \alpha_n Sw_n - w_n + u_n\| \leqslant L\|y_n - w_n + \alpha_n(Sw_n - y_n)\| + L\|u_n\| \leqslant$$

$$L[\beta_n(L+1) + \alpha_n(1+L+(L^2-L)\beta_n)]\|y_n - q\| + L(L\alpha_n+1)\|v_n\| + L\|u_n\| \quad ③$$

将③代入②式并整理得

$$\|y_{n+1} - q\| \leqslant \left(1 - \frac{\alpha_n(1+k-\beta_n L(L+1) - \alpha_n L(1+L+(L^2-L)\beta_n))}{1+k\alpha_n}\right)\|y_n - q\| + \frac{A_n}{1+k\alpha_n} + \sigma_n \quad ④$$

其中，$A_n = \alpha_n L(L\alpha_n+1)\|v_n\| + (L\alpha_n+1)\|u_n\|$.

令 $\gamma_n = \alpha_n(1+k-\beta_n L(L+1) - \alpha_n L(1+L+(L^2-L)\beta_n))/(1+k\alpha_n)$，则由条件 i) 及 $\varepsilon_0 \in \left(\varepsilon_3, \dfrac{1+k}{2L^3+4L^2+2L+1}\right)$ 可知，存在 $N_0 \in N$，$\forall n \geqslant N_0$，有 $\alpha_n < \varepsilon_0$，$\beta_n < \varepsilon_0$. 于是

$$\gamma_n = \frac{\alpha_n(1+k-\beta_n L(L+1) - \alpha_n L(1+L+(L^2-L)\beta_n))}{1+k\alpha_n} \geqslant$$

$$\frac{\alpha_n(1+k-\varepsilon_0[L(L+1) + (L(1+L) + L(L^2-L)\varepsilon_0)])}{1+k\alpha_n} \geqslant$$

$$\frac{\alpha_n(1+k-\varepsilon_0[2L(L+1) + (L(L^2-L)\varepsilon_0])}{1+k\alpha_n} \geqslant$$

$$\frac{\alpha_n\left(1+k-\varepsilon_0\left[2L(L+1) + L(L^2-L)\dfrac{1+k}{2L^3+4L^2+2L+1}\right]\right)}{1+k\alpha_n} \geqslant$$

$$\frac{\alpha_n(1+k-\varepsilon_n[2L^2+2L+1])}{1+k\alpha_n} \geqslant \frac{\alpha_n\varepsilon}{1+k\alpha_n} \geqslant \begin{cases} \dfrac{\varepsilon\alpha_n}{1+k} & 0<k<1 \\ \varepsilon\alpha_n & -1<k\leqslant 0 \end{cases} \quad ⑤$$

其中，$\varepsilon \in (0, 1+k-\varepsilon_0(2L^2+2L+1))$.

若 $0 \leqslant k < 1$，则 $1+k\alpha_n \geqslant 1$，从而

$$\gamma_n = \frac{\alpha_n(1+k-\beta_n L(L+1) - \alpha_n L(1+L+(L^2-L)\beta_n))}{1+k\alpha_n} \leqslant \alpha_n(1+k) < \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

若 $-1 < k < 0$，则因 $\alpha_n < 1$，所以 $k\alpha_n > k$，且有 $1+k\alpha_n > 1+k > 0$，从而

$$\gamma_n = \frac{\alpha_n(1+k-\beta_n L(L+1) - \alpha_n L(1+L+(L^2-L)\beta_n))}{1+k\alpha_n} \leqslant \frac{\alpha_n(1+k)}{1+k} = \alpha_n < 1$$

于是 $\gamma_n \in (0,1)$，从而由④式有

$$\|y_{n+1} - q\| \leqslant (1-\gamma_n)\|y_n - q\| + \frac{A_n}{1+k\alpha_n} + \sigma_n \qquad \forall n \geqslant N_0 \quad ⑥$$

显然 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\gamma_n = \infty$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}A_n < \infty$，下面只需证明 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{A_n}{1+k\alpha_n} < \infty$. 若 $-1 < k \leqslant 0$，则因 $\alpha_n < 1$，所以 $1+k\alpha_n \geqslant 1+k > 0$，于是有

$$\frac{A_n}{1+k\alpha_n} = \frac{\alpha_n L(L\alpha_n+1)\|v_n\|}{1+k\alpha_n} + \frac{(L\alpha_n+1)\|u_n\|}{1+k\alpha_n} \leqslant \frac{L(L+1)\alpha_n\|v_n\|}{1+k} + \frac{(L+1)\|u_n\|}{1+k}$$

由 $\sum_{n=0}^{\infty}\|u_n\|<\infty$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\|v_n\|<\infty$ 可知，$\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{A_n}{1+k\alpha_n}<\infty$；若 $0<k<1$，则 $1+k\alpha_n\geqslant 1$，于是

$$\frac{A_n}{1+k\alpha_n}=\frac{\alpha_n L(L\alpha_n+1)\|v_n\|}{1+k\alpha_n}+\frac{(L\alpha_n+1)\|u_n\|}{1+k\alpha_n}\leqslant L(L+1)\alpha_n\|v_n\|+(L+1)\|u_n\|$$

由 $\sum_{n=0}^{\infty}\|u_n\|<\infty$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\|v_n\|<\infty$ 可知，$\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{A_n}{1+k\alpha_n}<\infty$. 这样由引理 1 可知 $y_n\to q(n\to\infty)$，即 $\{x_n\}$ 关于方程 $x+Tx=f$ 是几乎 T 稳定的，根据 ⑤⑥ 式有估计式

$$\|y_{n+1}-q\|\leqslant\begin{cases}\prod_{j=N_0}^{n}\left(1-\frac{\varepsilon\alpha_j}{1+k}\right)\|y_{N_0}-q\|+\sum_{j=N_0}^{n}(\varepsilon_j+A_j)\prod_{j=N_0}^{n}\left(1-\frac{\varepsilon\alpha_j}{1+k}\right) & 0<k<1\\ \prod_{j=N_0}^{n}(1-\varepsilon\alpha_j)\|y_{N_0}-q\|+\sum_{j=N_0}^{n}\left(\varepsilon_j+\frac{A_j}{1+k}\right)\prod_{j=N_0}^{n}(1-\varepsilon\alpha_j) & -1<k\leqslant 0\end{cases}$$

特别地，若取 $\alpha_n=\begin{cases}\dfrac{2}{n+1} & 0<k<1\\ \dfrac{2}{(n+1)(1+k)} & -1<k\leqslant 0\end{cases}$，$\beta_n=0(\forall n\geqslant 0)$，则 $\varepsilon_1=\varepsilon_2$，取 $\varepsilon_0=\dfrac{1+k}{2(2L^3+4L^2+2L+1)}$，$\varepsilon=\dfrac{1+k}{2}$，要满足

$$\gamma_n=\frac{\alpha_n(1+k-\alpha_n L(1+L))}{1+k\alpha_n}\geqslant\begin{cases}\dfrac{\alpha_n\left[1+k-L(L+1)\dfrac{2}{n+1}\right]}{1+k}\\ \alpha_n\left[1+k-L(L+1)\dfrac{2}{(n+1)(1+k)}\right]\end{cases}\geqslant$$

$$\begin{cases}\dfrac{\varepsilon\alpha_n}{1+k}=\dfrac{1}{n+1} & 0<k<1\\ \varepsilon\alpha_n=\dfrac{1}{n+1} & -1<k\leqslant 0\end{cases}$$

只要 $n>\max\left\{\dfrac{4L(L+1)}{1+k}-1,\dfrac{4L(L+1)}{(1+k)^2}-1\right\}$，于是取 $N_1=\max\left\{\dfrac{4L(L+1)}{1+k}-1,\dfrac{4L(L+1)}{(1+k)^2}-1\right\}\in N$，$\forall n\geqslant N_1$，有

$$\|y_{n+1}-q\|\leqslant\begin{cases}\prod_{j=N_1}^{n}\left(1-\frac{\varepsilon\alpha_j}{1+k}\right)\|y_{N_1}-q\|+\sum_{j=N_1}^{n}(\varepsilon_j+A_j)\prod_{j=N_1}^{n}\left(1-\frac{\varepsilon\alpha_j}{1+k}\right) & 0<k<1\\ \prod_{j=N_1}^{n}(1-\varepsilon\alpha_j)\|y_{N_1}-q\|+\sum_{j=N_1}^{n}\left(\varepsilon_j+\frac{A_j}{1+k}\right)\prod_{j=N_1}^{n}(1-\varepsilon\alpha_j) & -1<k\leqslant 0\end{cases}\leqslant$$

$$\begin{cases}\prod_{j=N_1}^{n}\left(1-\frac{1}{j+1}\right)\|y_{N_1}-q\|+\sum_{j=N_1}^{n}(\varepsilon_j+A_j)\prod_{j=N_1}^{n}\left(1-\frac{1}{j+1}\right) & 0<k<1\\ \prod_{j=N_1}^{n}\left(1-\frac{1}{j+1}\right)\|y_{N_1}-q\|+\sum_{j=N_1}^{n}\left(\varepsilon_j+\frac{A_j}{1+k}\right)\prod_{j=N_1}^{n}\left(1-\frac{1}{j+1}\right) & -1<k\leqslant 0\end{cases}=$$

$$\begin{cases}\dfrac{N_1}{n+1}\left\{\|y_{N_1}-q\|+\sum_{j=N_1}^{n}(\varepsilon_j+A_j)\right\} & 0<k<1\\ \dfrac{N_1}{n+1}\left\{\|y_{N_1}-q\|+\sum_{j=N_1}^{n}\left(\varepsilon_j+\dfrac{A_j}{1+k}\right)\right\} & -1<k\leqslant 0\end{cases}$$

定理 1 证毕.

注 1 当 $k=0$ 和 $0<k<1$ 时,分别得增生和强增生算子方程 $x+Tx=f(f\in X)$ 解的稳定性的相应结果. 定理 1 推广, 改进了文献[1, 3 − 5] 结果.

由定理 1 立得定理 2.

定理 2 设 T 是 Lipschitz 连续 k − 次增生算子($-1<k<1$),$\{\alpha_n\}$ 是[0,1] 中的实数列,满足下列条件:

i) $\limsup\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\varepsilon_1<\dfrac{1+k}{2L^3+4L^2+2L+1}$;

ii) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$.

设 $\varepsilon_3=\max\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$, 任意取定 $\varepsilon_0\in\left(\varepsilon_3,\dfrac{1+k}{2L^3+4L^2+2L+1}\right)$,设 $\{y_n\}$ 是 X 中的任意序列,令 $\sigma_n=\|y_{n+1}-(1-\alpha_n)y_n-\alpha_n(f-Ty_n)-u_n\|,\forall n\geq 0$, 其中 $\{u_n\}_{n\geqslant 0}$ 为 X 中的序列且满足 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\|u_n\|<\infty$, 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sigma_n<\infty$,则 $y_n\to q(n\to\infty)$,即序列 $\{x_n\}$ 关于方程 $x+Tx=f$ 是几乎 T − 稳定的,且存在 $N_0\in N$ 和非负序列 $\{A_n\}$ 满足 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}A_n<\infty$,以及实数 $\varepsilon\in(0,1+k-\varepsilon_0(2L^2+2L+1))$,使 $\forall n\geqslant N_0$,有估计

$$\|y_{n+1}-q\|\leqslant\begin{cases}\prod\limits_{j=N_0}^{n}\left(1-\dfrac{\varepsilon\alpha_j}{1+k}\right)\|y_{N_0}-q\|+\sum\limits_{j=N_0}^{n}(\varepsilon_j+A_j)\prod\limits_{j=N_0}^{n}\left(1-\dfrac{\varepsilon\alpha_j}{1+k}\right) & 0<k<1\\ \prod\limits_{j=N_0}^{n}(1-\varepsilon\alpha_j)\|y_{N_0}-q\|+\sum\limits_{j=N_0}^{n}\left(\varepsilon_j+\dfrac{A_j}{1+k}\right)\prod\limits_{j=N_0}^{n}(1-\varepsilon\alpha_j) & -1<k\leqslant 0\end{cases}$$

特别地, 若取 $\alpha_n=\begin{cases}\dfrac{2}{n+1} & 0<k<1\\ \dfrac{2}{(n+1)(1+k)} & -1<k\leqslant 0\end{cases}\quad(\forall n\geqslant 0)$,则存在

$$N_1=\max\left\{\frac{4L(L+1)}{1+k}-1,\frac{4L(L+1)}{(1+k)^2}-1\right\}\in N\qquad\forall n\geqslant N_1$$

有

$$\|y_{n+1}-q\|\leqslant\begin{cases}\dfrac{N_1}{n+1}\left\{\|y_{N_1}-q\|+\sum\limits_{j=N_1}^{n}(\varepsilon_j+A_j)\right\} & 0<k<1\\ \dfrac{N_1}{n+1}\left\{\|y_{N_1}-q\|+\sum\limits_{j=N_1}^{n}\left(\varepsilon_j+\dfrac{A_j}{1+k}\right)\right\} & -1<k\leqslant 0\end{cases}$$

与定理 1 证明过程类似,可得 k − 次散逸算子方程解的收敛性与稳定性定理, 其证明省略.

定理 3 设 $T:X\to X$ 是 Lipschitz 连续 k − 次散逸算子($-1<k<1$), 方程 $x-\lambda Tx=f(f\in X,\lambda>0)$ 有解 $q\in X$, $\{u_n\}$ 和 $\{v_n\}$ 是 X 中的序列, $\{\alpha_n\}$ 和 $\{\beta_n\}$ 分别是$(0,1/(1+\lambda)\subset(0,1)$ 与[0, 1) 中的实数列,满足下列条件:

i) $\limsup\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\varepsilon_1<\dfrac{1+k}{2L^3+4L^2+2L+1}$,且$\limsup\limits_{n\to\infty}\beta_n=\varepsilon_2<\dfrac{1+k}{2L^3+4L^2+2L+1}$;

ii) $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n = \infty$;

iii) $\sum_{n=0}^{\infty}\|u_n\| < \infty$, $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\|v_n\| < \infty$.

设 $\varepsilon_3 = \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$,任意取 $\varepsilon_0 \in \left(\varepsilon_3, \frac{1+k}{2L^3+4L^2+2L+1}\right)$, $L_* = \lambda L$,对任意 $x_0 \in X$, $\{x_n\}$ 是由下式定义的带误差的 Ishikawa 迭代序列:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n(f+\lambda Tz_n) + u_n \\ z_n &= (1-\beta_n)x_n + \beta_n(f+\lambda Tx_n) + v_n \qquad \forall n \geqslant 0 \end{aligned} \tag{7}$$

则有如下结论成立.

1) 由 ⑦ 所定义的带误差的 Ishikawa 迭代序列 $\{x_n\}$ 强收敛到方程 $x - \lambda Tx = f$ 的唯一解 q,且存在 $N_0 \in N$ 和非负序列 $\{A_n\}$ 满足 $\sum_{n=0}^{\infty}A_n < \infty$,以及实数 $\varepsilon \in (0, 1+k-\varepsilon_0(2L^2+2L+1))$, 使 $\forall n \geqslant N_0$,有估计

$$\|x_{n+1}-q\| \leqslant \begin{cases} \prod_{j=N_0}^{n}\left(1-\frac{\varepsilon\alpha_j}{1+k}\right)\|x_{N_0}-q\| + \sum_{j=N_0}^{n}A_j\prod_{j=N_0}^{n}\left(1-\frac{\varepsilon\alpha_j}{1+k}\right) & 0<k<1 \\ \prod_{j=N_0}^{n}(1-\varepsilon\alpha_j)\|x_{N_0}-q\| + \sum_{j=N_0}^{n}\frac{A_j}{1+k}\prod_{j=N_0}^{n}(1-\varepsilon\alpha_j) & -1<k\leqslant 0 \end{cases}$$

特别地, 若取 $\alpha_n = \begin{cases} \frac{2}{n+1} & 0<k<1 \\ \frac{2}{(n+1)(1+k)} & -1<k\leqslant 0 \end{cases}$, $\beta_n = 0(\forall n \geqslant 0)$,则存在

$$N_1 = \max\left\{\frac{4L(L+1)}{1+k}-1, \frac{4L(L+1)}{(1+k)^2}-1\right\} \in N \qquad \forall n \geqslant N_1$$

有

$$\|x_{n+1}-q\| \leqslant \begin{cases} \frac{N_1}{n+1}\left\{\|x_{N_1}-q\| + \sum_{j=N_1}^{n}A_j\right\} & 0<k<1 \\ \frac{N_1}{n+1}\left\{\|x_{N_1}-q\| + \sum_{j=N_1}^{n}\frac{A_j}{1+k}\right\} & -1<k\leqslant 0 \end{cases}$$

2) 设 $\{y_n\}$ 是 X 中的任意序列,令

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \|y_{n+1} - (1-\alpha_n)y_n - \alpha_n(f+\lambda Tw_n) - u_n\| \\ w_n &= (1-\beta_n)y_n + \beta_n(f+\lambda Ty_n) + v_n \qquad \forall n \geqslant 0 \end{aligned}$$

若 $\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_n < \infty$,则 $y_n \to q(n\to\infty)$,即序列 $\{x_n\}$ 关于方程 $x-\lambda Tx = f$ 是几乎 T-稳定的,且存在非负序列 $\{A_n\}$ 满足 $\sum_{n=0}^{\infty}A_n < \infty$,以及实数 $\varepsilon \in (0, 1+k-\varepsilon_0(2L^2+2L+1))$, 使 $\forall n \geqslant N_0$,有估计

$$\|y_{n+1}-q\| \leqslant \begin{cases} \prod_{j=N_0}^{n}\left(1-\frac{\varepsilon\alpha_j}{1+k}\right)\|y_{N_0}-q\| + \sum_{j=N_0}^{n}(\varepsilon_j + A_j)\prod_{j=N_0}^{n}\left(1-\frac{\varepsilon\alpha_j}{1+k}\right) & 0<k<1 \\ \prod_{j=N_0}^{n}(1-\varepsilon\alpha_j)\|y_{N_0}-q\| + \sum_{j=N_0}^{n}\left(\varepsilon_j + \frac{A_j}{1+k}\right)\prod_{j=N_0}^{n}(1-\varepsilon\alpha_j) & -1<k\leqslant 0 \end{cases}$$

特别地,若取 $\alpha_n = \begin{cases} \dfrac{2}{n+1} & 0 < k < 1 \\ \dfrac{2}{(n+1)(1+k)} & -1 < k \leqslant 0 \end{cases}$,$\beta_n = 0(\forall n \geqslant 0)$,则存在

$$N_1 = \max\left\{\frac{4L(L+1)}{1+k} - 1, \frac{4L(L+1)}{(1+k)^2} - 1\right\} \in N \qquad \forall n \geqslant N_1$$

有

$$\|y_{n+1} - q\| \leqslant \begin{cases} \dfrac{N_1}{n+1}\left\{\|y_{N_1} - q\| + \sum\limits_{j=N_1}^{n}(\varepsilon_j + A_j)\right\} & 0 < k < 1 \\ \dfrac{N_1}{n+1}\left\{\|y_{N_1} - q\| + \sum\limits_{j=N_1}^{n}\left\{\varepsilon_j + \dfrac{A_j}{1+k}\right\}\right\} & -1 < k \leqslant 0 \end{cases}$$

3 结语

随着非线性算子不动点迭代逼近理论的发展,提出新的更广泛的非线性算子与迭代算法借以统一前人的成果,是非线性算子迭代逼近理论的发展趋势之一. 本文在已有成果的基础上研究了更广泛的一类 k - 次增生算子方程 $x + Tx = f$ 和 k - 次散逸算子方程 $x - \lambda Tx = f$ 解的带误差的 Ishikawa 迭代序列的稳定性问题,并给出 $\{y_n\}$ 收敛到方程 $x + Tx = f$ 的唯一解新的收敛率估计式,所得结果改进和发展了近年来一些相关成果. 今后的研究将主要集中于使用多步迭代算法、粘滞迭代算法去解决本文所研究的算子方程解的相关问题.

参考文献:

[1] 徐承璋. 含有 k - 次增生算子的方程的迭代解[J]. 应用泛函分析学报,2001,12(4):375.

[2] 任卫云,何震. 含 k - 次增生算子具误差的 Ishikawa 迭代的收敛性问题[J]. 应用泛函分析学报,2003,5(4):343.

[3] 张树义,郭新琪. k - 次增生算子方程解的迭代收敛性与稳定性[J]. 南阳师范学院学报(自然科学版),2010(3):8.

[4] 张树义,郭新琪. Banach 空间中 k - 次增生算子方程带误差的迭代序列的收敛性[J]. 南阳师范学院学报(自然科学版), 2011(3):4.

[5] 张树义,刘冬红,李丹. k - 次增生算子方程的迭代解[J]. 北华大学学报(自然科学版),2015,16(5):574.

[6] 赵美娜, 张树义,赵亚莉. Banach 空间中 k - 次增生算子方程解的迭代逼近[J]. 北华大学学报(自然科学版),2015,16(6):710.

[7] 谷峰. 一类 k - 次增生型变分包含解的迭代构造[J]. 系统科学与数学,2008(2):144.

[8] 张树义. Banach 空间中 k - 次增生型变分包含解的存在与收敛性[J]. 系统科学与数学,2012,32(3):363.

[9] LIU L S. Ishikawa and Mann iterative process with errors for nonlinear strongly accretive mappings in Banach space[J]. J Math Anal Appl,1995,194:114.

[10] 张树义,万美玲,李丹. 渐近伪压缩型映象迭代序列的强收敛定理[J]. 江南大学学报(自然科学版),

2014,13(6):726.

[11] 张树义,赵美娜,李丹. 渐近半压缩映象具混合型误差的迭代收敛性[J]. 北华大学学报(自然科学版),2015,16(3):165.

[12] 万美玲,张树义,郑晓迪. 赋范线性空间中 φ – 强增生算子方程解的迭代收敛性[J]. 北华大学学报(自然科学版),2016,16(3):305.

[13] 张树义,宋晓光,万美玲. 非 Lipschitz 渐近伪压缩映象不动点的迭代逼近[J]. 北华大学学报(自然科学版),2014,15(5): 581.

[14] 张树义,林媛. $\Phi - \varphi$ – 型压缩映象不动点的存在性[J]. 北华大学学报(自然科学版),2016,17(1): 1.

[15] 张树义,赵美娜,刘冬红. 弱相容映射的几个新的公共不动点定理[J]. 江南大学学报(自然科学版),2015,14(6): 852.

[16] 张树义,宋晓光,栾丹. Φ – 压缩映象的公共不动点定理[J]. 北华大学学报(自然科学版),2014,15(2): 167.

[17] 刘冬红,张树义,郑晓迪. 2 – 距离空间中一类压缩型映象的不动点定理[J]. 南通大学学报(自然科学版),2016,15(2) :68.

[18] 赵美娜,张树义. 关于 2 – 渐近正则映象的一个注记[J]. 鲁东大学学报(自然科学版),2016,32(3): 193.

[19] 张树义,赵美娜,李丹. 关于平方型 Altman 映象的公共不动点定理[J]. 江南大学学报(自然科学版),2015,14(4): 472.

[20] 张树义. 赋范线性空间中渐近拟伪压缩型映象不动点的修改的广义 Ishikawa 迭代逼近[J]. 应用数学学报,2011,34(5):886.

[21] 张树义. 一致 Lipschitz 渐近 φ_i – 型拟伪压缩映象多步平行迭代算法的收敛性[J]. 系统科学与数学,2013,33(11):1233.