



引用格式:刘慧娟,曲双红. 满足条件 $A^* = -A^3$ 的矩阵性质研究[J]. 轻工学报,2020,35(6):105-108.

中图分类号:O151.21 文献标识码:A

DOI:10.12187/2020.06.013

文章编号:2096-1553(2020)06-0105-04

满足条件 $A^* = -A^3$ 的矩阵性质研究

Research on the properties of matrices suited to $A^* = -A^3$

刘慧娟¹,曲双红²

LIU Huijuan¹,QU Shuanghong²

关键词:

正规矩阵;共轭转置矩阵;对角化;特征值分布;矩阵性质

Key words:

normal matrix;
conjugate transpose
matrix;diagonalization;
distribution of
characteristic values;
matrix property

1. 郑州商学院 通识教育中心,河南 巩义 451200;

2. 郑州轻工业大学 数学与信息科学学院,河南 郑州 450002

1. General Education Center, Zhengzhou Business University, Gongyi 451200, China;

2. College of Mathematics and Information Science, Zhengzhou University of Light Industry, Zhengzhou 450002, China

摘要:利用正规矩阵、共轭转置矩阵、矩阵的奇异值分解等概念和理论,发现了满足条件 $A^* = -A^3$ 的矩阵 A 是可以对角化的,也获得了该矩阵的可能特征值分布、公式 $(A \otimes B)^* = (A \otimes B)^3$ 、奇异值分解式和公式成立的充要条件.

收稿日期:2020-05-24

基金项目:国家自然科学基金项目(11801529)

作者简介:刘慧娟(1990—),女,河南省焦作市人,郑州商学院通识教育中心助教,硕士,主要研究方向为矩阵理论、经济统计等.

通信作者:曲双红(1973—),女,河南省偃师市人,郑州轻工业大学副教授,主要研究方向为应用数学等.

Abstract: Using the concepts and theories of normal matrix, conjugate transpose matrix and singular value decomposition and so on, the matrix A suited to $A^* = -A^3$ was found to be diagonalizable; other results on this kind of matrices such as distribution of the possible characteristic values, formula $(A \otimes B)^* = (A \otimes B)^3$, singular value decomposition and the sufficient and necessary conditions for the establishment of the formula were also investigated.

0 引言

矩阵在求解线性方程组,特别是求解超大型线性方程组时起着重要作用,当这种方程组的系数矩阵 A 可对角化时,方程组更易求解.正规矩阵就是一种可以对角化的矩阵,已引起一些学者的重点关注.文献[1]发现并研究了一类新的正规矩阵,给出了此正规矩阵特征值的具体值,以及当特征值均为实数时,该矩阵为 Hermite 矩阵的结论;文献[2-6]研究发现, Hermite 矩阵也属于正规矩阵,它不仅可以对角化,而且在解析函数插值问题的研究中,它的正定、半正定成为判定一些插值问题是否有解、是否有无穷多解的关键.本文受文献[1]和 Hermite 矩阵的启发,拟寻找一类新的正规矩阵,即满足条件 $A^* = -A^3$ 的矩阵,并对其性质进行研究,以期丰富共轭转置矩阵的理论,为相关方程组的求解提供理论支撑.

1 基本结果

在以下的讨论中,记 $(\bar{A})^T = A^*$.

引理^[6] 设 $A \in C^{n \times n}$, 则 A 为正规矩阵当且仅当 A 酉相似于一个对角矩阵 D , 而 D 的对角元素为 A 的 n 个特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

定理 1 设 $A \in C^{n \times n}$, $A^* = -A^3$, 则有如下结论:

1) A 是正规矩阵;

2) $\sigma(A) \subset \left\{0, \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i), \right.$

$\left. \frac{-\sqrt{2}}{2}(1+i), \frac{-\sqrt{2}}{2}(1-i) \right\}$;

3) A 的属于不同特征值的特征向量正交;

4) 存在 n 阶酉矩阵 U, V 使

$$A = U \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* = U \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*.$$

证明 1) 因为 $A^* A = (-A^3) A = A(-A^3) = AA^*$, 故 A 为正规矩阵. 再由引理可知, A 酉相似于一个对角矩阵 D , 即 A 可以对角化.

2) 设 $\lambda_0 = a + bi$ ($a, b \in R$) 是 A 的一个特征值, 则存在非零向量 x (这里 $x \in C^n$), 使得

$$Ax = \lambda_0 x$$

由于

$$(-A^3 x, x) = x^* (-A^3 x) = -\lambda_0^3 (x, x)$$

$$(A^* x, x) = x^* A^* x = (Ax)^* x = \bar{\lambda}_0 (x, x)$$

及 $A^* = -A^3$, 所以 $\bar{\lambda}_0 (x, x) = -\lambda_0^3 (x, x)$.

又因为 $(x, x) \neq 0$, 于是可得 $\bar{\lambda}_0 = -\lambda_0^3$, 即 $a - bi = -(a + bi)^3 = (3ab^2 - a^3) + (b^3 - 3a^2b)i$ 则

$$\begin{cases} a = 3ab^2 - a^3 \\ -b = -3a^2b + b^3 \end{cases} \quad (1)$$

下面分两种情况讨论.

i) 若 $a = 0$, 得 $b^3 + b = 0, b = 0$, 这时, $\lambda_0 = 0$ 是 A 的一个特征值.

ii) 若 $a \neq 0$, 由①式得 $1 = 3b^2 - a^2$, 再解联立方程组

$$\begin{cases} 3b^2 - a^2 = 1 \\ 3a^2b - b^3 = b \end{cases}$$

可得 $b = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, a = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, 因而 λ_0 的值为 $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

或 $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ 或 $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ 或 $-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

所以

$$\sigma(A) \subset \left\{ 0, \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i), \right. \\ \left. -\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i), -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \right\}$$

3) 设 $\lambda, \mu \in \sigma(A)$, 且 $\lambda \neq \mu$, 而非零的 $\alpha, \beta \in C^n$ 是 A 的且分别属于特征值 λ, μ 的特征向量. 于是, 有

$$-\lambda^3(\alpha, \beta) = (-\lambda^3\alpha, \beta) = (A^*\alpha, \beta) = \\ \beta^* A^* \alpha = (\alpha, A\beta) = (\alpha, \mu\beta) = \bar{\mu}(\alpha, \beta) \\ (-\lambda^3 - \bar{\mu})(\alpha, \beta) = 0$$

因为 λ, μ 可能的取值分别是 $0, \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),$

$\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i), -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), -\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$, 而经过具体计算可知, $\bar{\mu} \neq -\lambda^3$, 即 $\bar{\mu} + \lambda^3 \neq 0$, 只有 $(\alpha, \beta) = 0$, 所以 $\alpha \perp \beta$.

4) 由 2) 可知, 适合条件 $A^* = -A^3$ 的矩阵 A 为正规矩阵, 故存在 n 阶酉矩阵 P 使

$$A = P \text{diag} \left[\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{k_1}, \underbrace{\lambda_2, \dots, \lambda_2}_{k_2}, \underbrace{\lambda_3, \dots, \lambda_3}_{k_3}, \right. \\ \left. \underbrace{\lambda_4, \dots, \lambda_4}_{k_4}, \underbrace{\lambda_5, \dots, \lambda_5}_{k_5} \right] P^{-1}$$

其中 $\lambda_5 = 0$. 因为

$$A^* A = -A^4 =$$

$$-P \text{diag} \left[\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{k_1}, \underbrace{\lambda_2, \dots, \lambda_2}_{k_2}, \underbrace{\lambda_3, \dots, \lambda_3}_{k_3}, \right. \\ \left. \underbrace{\lambda_4, \dots, \lambda_4}_{k_4}, \underbrace{\lambda_5, \dots, \lambda_5}_{k_5} \right] P^{-1}$$

其中

$$-\lambda_i^4 = \begin{cases} 1 & i = 1, 2, 3, 4 \\ 0 & i = 5 \end{cases}$$

故 A 的正奇异值是 $\sum_{i=1}^4 k_i$ 个 1. 由矩阵的奇异值分解定理, 存在 n 阶酉矩阵 U 和 V , 使得

$$A = U \begin{bmatrix} \sum_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* = U \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*$$

矩阵的奇异值分解在线性系统理论、最小二乘问题、广义逆矩阵、实验数据处理等方面具有重要应用^[8]. 若令 $U = [U_r, U_{n-r}]$, $V^* =$

$$\begin{bmatrix} V_r^* \\ V_{n-r}^* \end{bmatrix}, \text{ 则有}$$

$$A = U \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* = U_r I_r V_r^* = U_r V_r^*$$

定理 2 设 $A, B \in C^{n \times n}$, 且 $A^* = -A^3$, $B^* = -B^3$, 则有如下结论:

$$1) (A \otimes B)^* = (A \otimes B)^3;$$

$$2) (A \oplus B)^* = -(A \oplus B)^3 \Leftrightarrow (A \oplus B)$$

$$(B \otimes A) = 0.$$

证明 根据参考文献[6]关于矩阵张量积与张量积的基本性质, 有

$$1) (A \otimes B)^* = A^* \otimes B^* = [(-A^3) \otimes (-B^3)] = [(-A) \otimes (-B)] \cdot (A \otimes B)(A \otimes B) = A^3 \otimes B^3 = (A \otimes B)(A \otimes B)(A \otimes B) = (A \otimes B)^3;$$

$$2) (A \oplus B)^* = (I \otimes A)^* + (B \otimes I)^* = (I \otimes A^*) + (B^* \otimes I) = -(I \otimes A^3) - (B^3 \otimes I) = -(A^3 \oplus B^3). \quad ②$$

由 ② 可得:

$$-(A \oplus B)^3 = -[(I \otimes A) + (B \otimes I)]^3 = -[(I \otimes A^2) + 2(B \otimes A) + (B^2 \otimes I)] \\ [(I \otimes A) + (B \otimes I)] = -(I \otimes A^3) - 3(B \otimes A^2) - 3(B^2 \otimes A) - (B^3 \otimes I) = -(A^3 \oplus B^3) - 3[(B \otimes A^2) + (B^2 \otimes A)] = (A \oplus B)^* - 3(B \otimes A)(A \oplus B)$$

$$\text{因此, } (A \oplus B)^* = -(A \oplus B)^3 \Leftrightarrow (B \otimes$$

$$A)(A \oplus B) = 0.$$

2 结语

本文利用共轭转置矩阵和参考文献[1]的方法证明了适用于 $A^* = -A^3$ 的矩阵 A 可以对角化及属于 A 的不同特征值的特征向量正交;得到了该矩阵的可能特征值的具体值;给出了公式 $(A \otimes B)^* = (A \otimes B)^3$ 和 $(A \oplus B)^* = -(A \oplus B)^3$ 成立的充要条件,以及这种矩阵的奇异值分解式. 该研究结果在判定矩阵的稳定性、线性矩阵方程求解、大型矩阵的简约表示及图像压缩中都具有潜在的应用价值.

参考文献:

- [1] 秦建国,谢栋梁,王静娜. 一类可以对角化的矩阵[J]. 郑州轻工业学院学报(自然科学版),2013,28(2):106.
- [2] 陈公宁,秦建国. 完全不确定 Hamburger 矩阵

矩量问题的有限阶解[J]. 数学物理学报,2010,30(3):577.

- [3] 秦建国,陈公宁,何红亚. Cauchy 矩阵及其相关的插值问题[J]. 数学的实践与认识,2006,36(9):233.
- [4] HU Y J, CHEN G N. On rank variation of block matrices generated by Nevanlinna matrix function[J]. Mathematische Nachrichten,2009,282(4):611.
- [5] 马明玥,付志慧. Hermitian 随机矩阵特征值[J]. 吉林大学学报(理学版),2016,54(3):513.
- [6] 陈公宁. 矩阵理论与应用[M]. 北京:科学出版社,2007.
- [7] MENDOZA A, LÁAZARO R, VARELA A. Supports for minimal hermitian matrices[J]. Linear Algebra and its Applications, 2019,584:458.
- [8] 于寅. 高等工程数学[M]. 武汉:华中科技大学出版社,2007.

(上接第 104 页)

- [17] 郎和. 保守单摆系统中的复杂结构[J]. 西北师范大学学报(自然科学版),2003,39(2):33.
- [18] 贺尚宏,谢进,程杰峰,等. 非线性单摆动力系统多参数混沌边缘的研究[J]. 机械传动,

2015,39(8):1.

- [19] 程春蕊,朱军辉,毛北行. 分数阶单摆系统的终端滑模混沌同步[J]. 工程数学学报,2019,36(1):99.
- [20] 胡建兵,赵灵冬. 分数阶系统稳定性理论与控制研究[J]. 物理学报,2013,62(24):5041.