



王允地,王帅,王良文,等. 含初始条件的基于黏滞阻尼的单自由度振动响应综合研究[J]. 轻工学报,2021, 36(5):110-117.

WANG Y D, WANG S, WANG L W, et al. Comprehensive research of single-degree-of-freedom vibration response based on viscous damping with initial conditions[J]. Journal of Light Industry, 2021, 36(5):110-117.

DOI:10.12187/2021.05.014

中图分类号:O32 文献标识码:A 文章编号:2096-1553(2021)05-0110-08

含初始条件的基于黏滞阻尼的单自由度振动响应综合研究

Comprehensive research of single-degree-of-freedom vibration response based on viscous damping with initial conditions

王允地¹,王帅²,王良文³,张继豪³,王若澜⁴

WANG Yundi¹, WANG Shuai², WANG Liangwen³, ZHANG Jihao³, WANG Ruolan⁴

1. 陕西科技大学 机电工程学院, 陕西 西安 710021;

2. 北京立德未来助学公益基金会, 北京 100026;

3. 郑州轻工业大学 机电工程学院, 河南 郑州 450002;

4. 郑州轻工业大学 国际教育学院, 河南 郑州 450002

1. College of Mechanical and Electrical Engineering, Shaanxi University of Science & Technology, Xi'an 710021, China;

2. Beijing Lide Future Public Welfare Foundation, Beijing 100026, China;

3. College of Mechanical and Electrical Engineering, Zhengzhou University of Light Industry, Zhengzhou 450002, China;

4. College of International Education, Zhengzhou University of Light Industry, Zhengzhou 450002, China

关键词:

单自由度振动;共振曲线图;过渡过程;拍振现象;库仑摩擦力

Key words:

single-degree-of-freedom vibration; resonance curve diagram; transition process; beat vibration phenomenon, Coulomb friction force

摘要:针对目前关于单自由度振动研究存在的不足,给出包含初始条件的基于黏滞阻尼的自由振动和简谐激励振动响应计算式,绘制了相应的幅频曲线图和相频曲线图;展示了小阻尼共振曲线的过渡过程,指出了无阻尼振动响应的拍振现象;推导出了库仑摩擦力对位移差别的影响式. 研究表明:对于无黏滞阻尼系统的共振响应,小库仑摩擦力抑制不住其增长趋势;当库仑摩擦力接近于激励力幅值时,才能使共振响应的幅值不超过稳态值.

收稿日期:2021-01-11

基金项目:国家自然科学基金项目(52075500);河南省重点科技攻关项目(202102210086);河南省高等学校重点科研项目(21A460034);郑州轻工业大学博士基金项目(2016BSJJ009)

作者简介:王允地(1961—),男,陕西省周至县人,陕西科技大学副教授,主要研究方向为机械学和机械动力学.

通信作者:王良文(1963—),男,湖北省荆州市人,郑州轻工业大学教授,博士,博士生导师,主要研究方向为机器人机构设计及动力学分析与综合.

Abstract: In view of the some shortcomings of research on single-degree-of-freedom vibration at present, the response equations of the free vibration and harmonic excitation based on viscous damping with initial conditions were listed, the amplitude frequency and phase frequency curves were plotted. The transition process of the small damped resonance curve was shown, the beat vibration phenomenon of undamped vibration response was presented. The Influence formulas of Coulomb friction on the difference of displacement were derived, the influence regularity of Coulomb friction on the vibration response was studied. The results showed that the small Coulomb friction could not restrain the growth trend for resonant response of non-viscous damping system. Only when the Coulomb friction was close to the excitation force amplitude, the resonance response amplitude could be restrained from exceeding the steady state value.

0 引言

工程实际中的很多问题都可抽象为单自由度系统的振动^[1-3]. 通常,机械系统的黏滞阻尼是非线性的,与温度、频率、应变等因素有关^[4-5]. 摩擦也是机械系统中常见的非线性问题之一^[6-9],在考虑系统的黏滞阻尼、摩擦等因素的前提下研究系统的振动非常必要. 针对简谐激励振动,文献[10-11]绘制了相频曲线图和幅频曲线图,但均未给出包含初始条件的简谐激励响应关系式. 文献[12]给出了包含初始条件的小阻尼简谐激励响应式,但未讨论阻尼比为0且激励频率与固有频率相等的情况. 文献[12-13]给出了计算任意激励响应的杜哈米积分,但未讨论库仑摩擦力对振动响应的影响. 文献[14]研究了单自由度含干摩擦振动系统的全局动力学行为. 文献[15]采用拉普拉斯变换和海维赛德第一类展开式,推导了有阻尼单自由度系统的强迫振动通解. 文献[16]考虑了具有非线性黏滞阻尼和库仑摩擦的单自由度系统,描述了从系统的自由响应信号中同时识别非线性阻尼和库仑摩擦的方法. 文献[17]讨论了纯库仑摩擦力对自由振动影响. 文献[18]用相图法就库仑摩擦力对强迫振动的影响作了一些定性讨论. 文献[19]提出了一种估算库仑和黏滞摩擦的减量方法. 文献[20]提出了将单自由度系统自由振动响应的封闭解作为动力系统库仑摩擦基础研究的一部分.

上述研究对含初始条件的基于黏滞阻尼的单自由度振动计算问题研究不够全面. 本文拟在现有研究成果的基础上,对包含初始条件的基于黏滞阻尼的自由振动响应和简谐激励响应进行研究,分析有阻尼共振和无阻尼共振,以及无阻尼振动响应中存在的拍振现象,探讨库仑摩擦力对系统振动的影响等,以期丰富单自由度系统振动理论的研究,为在工程中更好地应用单自由度振动系统提供支持.

1 黏滞阻尼自由振动响应

对物体质量为 m 、刚度为 k 、黏滞阻尼系数为 c 、激励力为 $F(t)$ (作用方向为物体的运动方向 X)的质量、弹簧、阻尼系统,有振动方程^[21]:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = F(t) \quad (1)$$

对于支座沿 X 方向以 $s=s(t)$ 作激励运动的情形,将上式中 $F(t)$ 换为 $ks(t)$ 即可,并称其为等效激励力. 激励力为0的振动即为自由振动,可将式①转化为

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\xi\omega_n \frac{dx}{dt} + \omega_n^2 x = 0 \quad (2)$$

其中, ω_n 为固有频率,且 $\omega_n^2=k/m$;阻尼比 $\xi=c/\sqrt{4mk}$.

设满足方程②的一个基解为 $x=e^{\lambda t}$,将其代入②后,有 $\lambda^2+2\xi\omega_n\lambda+\omega_n^2=0$,则此方程的解为 $\lambda_{1,2}=(-\xi\pm\sqrt{\xi^2-1})\omega_n$. 因此,自由振动方程的通解为 $x=Ae^{\lambda_1 t}+Be^{\lambda_2 t}$,其中 A 、 B 由初始条件决定.

若 $\xi > 1$, λ_1 和 λ_2 均为负数, 位移 x 随着时间 t 的增加从初始位置起迅速趋于 0, 或沿速度方向运动到极值点再迅速趋于 0.

若 $\xi = 1$, λ 出现重根 $-\omega_n$, 自由振动的一个基解为 $e^{\lambda t}$, 另一个变为 $te^{\lambda t}$. 此时, 通解为 $x = Ae^{-\omega_n t} + Bte^{-\omega_n t}$, 代入初始条件: $t = 0, x = x_0, \dot{x} = v_0$, 得: $A = x_0, B = v_0 + \omega_n x_0$. 由于幂函数随时间 t 的增速远低于负指数函数的降速, 经绘图比较发现, $\xi = 1$ 的自由振动响应形式与 $\xi > 1$ 的形式相似.

多数情况下, $\xi < 1$. 在复数范围内, 虚指数函数的线性组合等于三角函数的线性组合, 解表达式的实部和虚部均成为负指数函数与三角函数的乘积. 取其实部推得包含初始条件的小阻尼自由振动响应 x 为

$$x = e^{-\xi\omega_n t} \left(x_0 \cos\omega_d t + \frac{v_0 + \xi\omega_n x_0}{\omega_d} \sin\omega_d t \right)$$

其中 $\omega_d = \sqrt{1 - \xi^2} \omega_n$. 从该式看, 第一项是负指数函数, 第二项是角频率的三角函数. 只要 $\xi \neq 0$, 自由振动响应随时间趋于 0. 自由振动响应函数幅值时间超前于三角函数项幅值时间一个提前量 t^* , 令 x 对时间的导数等于 0, 则超前幅角 $\gamma = \omega_d t^* = A \tan(\xi / \sqrt{1 - \xi^2})$.

如果出现 $\xi = 0$ 的理想情况, 系统就会按 ω_n 为角频率的简谐规律一直振动, 故 ω_n 称为固有频率.

在实际问题中, ξ 很小, 自由振荡幅值会逐渐地减小. 相邻幅值以几何级数规律下降, 比值的自然对数为 $-2\pi\xi / \sqrt{1 - \xi^2}$.

2 黏滞阻尼简谐激励响应

2.1 稳态响应及幅频和相频曲线

假设激励力为一般简谐函数 $F(t) = F_0 \cos(\omega t - \varphi)$. 设转化后的强迫振动微分方程的特解为 $x = H \cos(\omega t - \varphi - \alpha)$, 代入振动微分方程①, 便可推得响应滞后相角为 $\alpha = \arctan 2 \cdot [2\xi\omega/\omega_n, 1 - (\omega/\omega_n)^2]$, 而响应幅值为静位移

与放大倍数 β 的乘积 $H = \frac{F_0}{k} \beta$, 其中 β 满足 $(1/\beta)^2 = [1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + (2\xi\omega/\omega_n)^2$. 由此可见, 滞后相角 α 和放大倍数 β 与激励相角 φ 无关, 只受激励频率与固有频率之比 ω/ω_n 和阻尼比 ξ 这两个因素的影响.

固定 ξ , 让 ω/ω_n 从 0 向无穷大变化, 则有: $\omega/\omega_n = 0$ 时, $\beta = 1, H = F_0/k, \alpha = 0$; $\omega/\omega_n = 1$ 时, $\beta = 1/(2\xi), \alpha = \pi/2$; $\omega/\omega_n \rightarrow \infty$ 时, β 趋于 0, α 趋于 π .

若 $\xi < \sqrt{2}/2$, 则当 $(\omega/\omega_n)^2 = 1 - 2\xi^2$ 时, β 取到最大值 $1/(2\xi\sqrt{1 - \xi^2})$, 而 $\tan\alpha = \sqrt{1 - 2\xi^2}/\xi, \alpha < \pi/2$.

若 $\xi > 0$, 随着时间增长, 齐次微分方程的通解幅值以负指数规律趋于 0, 只剩下与激励力频率 ω 相同的稳定简谐特解部分. 通常称其为由激励力引起的稳态响应:

$$x = \frac{F_0}{k} \beta \cos(\omega t - \varphi - \alpha)$$

值得注意的是, 在 $\omega/\omega_n = 1$ 附近, ξ 对 β 影响较大, 对其他参数影响较小. 另外, 若 ξ 较小, 则当 $\omega/\omega_n = 1$ 时, β 接近于最大值, 而 α 仍不受 ξ 的影响, 恒等于 $\pi/2$. 这也是当 $\omega/\omega_n = 1$ 时发生共振的原因.

图 1 是给定 ξ 后, β 及 α 随 ω/ω_n 变化的幅频曲线图和相频曲线图. 从图 1 可以看出, 在 $\omega/\omega_n = 1$ 附近, 随 ξ 减少, β 显著增加, 且在 $\omega/\omega_n = 1$ 时, α 不受 ξ 的影响.

2.2 包含初始条件的响应计算

强迫振动微分方程的通解等于强迫振动方程特解与对应的齐次微分方程通解之和. 再考虑初始条件, 即得方程的完整响应式. 阻尼比 $\xi \geq 1$ 的情况较少见, 在此不加讨论.

情形 1 阻尼比 $1 > \xi > 0$

当阻尼比 $1 > \xi > 0$ 时, 响应 x 由瞬态衰减项和稳态响应项组成.

令激励力 $F = F_0 \cos\omega t$, 则有:

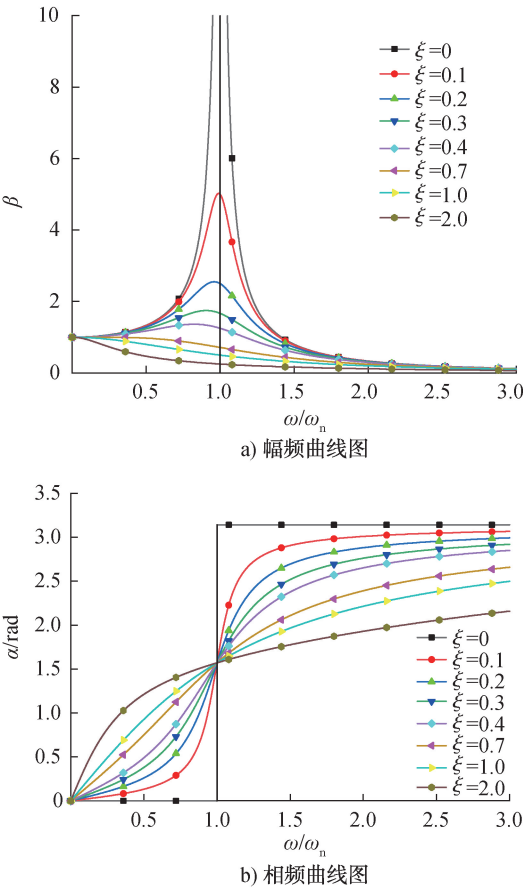


图 1 给定 ξ 后, β 及 α 随 ω/ω_n 变化的幅频曲线和相频曲线图

Fig. 1 Amplitude frequency curve and phase frequency curve for β and α changing follow ω/ω_n when ξ was given

$$x = e^{-\xi\omega_n t} \left[\left(x_0 - \frac{F_0}{k} \beta \cos \alpha \right) \cos \omega_d t + \frac{v_0 + \xi \omega_n \left(x_0 - \frac{F_0}{k} \beta \cos \alpha \right) - \frac{F_0}{k} \beta \omega \sin \alpha}{\omega_d} \sin \omega_d t \right] + \frac{F_0}{k} \beta \cos(\omega t - \alpha)$$

令激励力 $F = F_0 \sin \omega t$, 则有:

$$x = e^{-\xi\omega_n t} \left[\left(x_0 + \frac{F_0}{k} \beta \sin \alpha \right) \cos \omega_d t + \frac{v_0 + \xi \omega_n \left(x_0 + \frac{F_0}{k} \beta \sin \alpha \right) - \frac{F_0}{k} \beta \omega \cos \alpha}{\omega_d} \sin \omega_d t \right] + \frac{F_0}{k} \beta \sin(\omega t - \alpha)$$

令激励力 $F = F_0 \cos(\omega t - \varphi) = F_1 \cos \omega t + F_2 \sin \omega t$, 其中 $F_1 = F_0 \cos \varphi$, $F_2 = F_0 \sin \varphi$, 则有:

$$x = e^{-\xi\omega_n t} \left(x_0 \cos \omega_d t + \frac{v_0 + \xi \omega_n x_0}{\omega_d} \sin \omega_d t \right) - \frac{F_0}{k} \beta e^{-\xi\omega_n t} \left[\cos(\varphi + \alpha) \cos \omega_d t + \frac{\xi \omega_n \cos(\varphi + \alpha) + \omega \sin(\varphi + \alpha)}{\omega_d} \sin \omega_d t \right] + \frac{F_0}{k} \beta \cos(\omega t - \varphi - \alpha)$$

该完整响应式第一项为自由振动项,第二项为伴随自由振动项,第三项为稳态响应项. 自由振动项由初始条件 x_0 和 v_0 决定,随着时间趋于 0. 伴随自由振动项与初始条件无关,也随着时间趋于 0. 将该式中的时间 t 换成 $t-t_0$, 即可得到 $t=t_0$ 时,位移为 x_0 且速度为 v_0 的响应计算式.

情形 2 阻尼比 $\xi=0$

当阻尼比 $\xi=0$ 时,响应 x 由固有振动项和激励响应项组成.

若 $\omega < \omega_d$, 分别令激励力 $F_1 = F_0 \cos \omega t$, $F_2 = F_0 \sin \omega t$, $F = F_1 \cos \omega t + F_2 \sin \omega t$, 则可以推导出:

$$x = \left(x_0 - \frac{F_1}{k} \beta \right) \cos \omega_n t + \frac{v_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + \frac{F_1}{k} \beta \cos \omega t - \beta \frac{F_2 \omega}{k \omega_n} \sin \omega_n t + \frac{F_2}{k} \beta \sin \omega t$$

其中 $\beta = 1/[1-(\omega/\omega_n)^2]$.

若 $\omega > \omega_d$, 则类似可以推导出:

$$x = \left(x_0 + \frac{F_1}{k} \beta \right) \cos \omega_n t + \frac{v_0}{\omega_n} \sin \omega_n t - \frac{F_1}{k} \beta \cos \omega t + \frac{F_2 \omega}{k \omega_n} \beta \sin \omega_n t - \frac{F_2}{k} \beta \sin \omega t$$

其中 $\beta = 1/[(\omega/\omega_n)^2 - 1]$.

若 $\omega = \omega_n$, 可以推导出:

$$x = x_0 \cos \omega_n t + \frac{v_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + \frac{F_1}{2k} \omega t \sin \omega t + \frac{F_2}{2k} \sin \omega_n t - \frac{F_2}{2k} \omega t \cos \omega t$$

2.3 共振曲线的过渡过程及拍振现象

由于简谐激励响应规律与激励相角无关,因此只讨论纯余弦激励的情况。

2.3.1 有阻尼共振曲线 当初始位移 $x_0=0$ 、速度 $v_0=0$ 时,令激励力 $F=F_0\cos\omega_n t$,则共振响应 x 为

$$x = e^{-\xi\omega_n t} \left(-\frac{F_0}{k}\beta\cos\alpha\cos\omega_d t - \frac{F_0}{k}\xi\omega_n \cdot \frac{\beta\cos\alpha + \beta\omega_n\sin\alpha}{\omega_d}\sin\omega_d t \right) + \frac{F_0}{k}\beta\cos(\omega_n t - \alpha)$$

其中, $\beta=1/(2\xi)$, $\alpha=\pi/2$ 。

在阻尼比 ξ 较小的情况下, $\omega_d \approx \omega_n$, x 的响应式可简化为

$$x \approx -e^{-\xi\omega_n t} \frac{F_0}{k}\beta(\cos\alpha\cos\omega_n t + \sin\alpha\sin\omega_n t - \cos(\omega_n t - \alpha)) = \frac{F_0}{k}\beta(1 - e^{-\xi\omega_n t})\sin\omega_n t$$

图2给出了有阻尼共振响应计算实例结果,其中 $m=0.1\text{ kg}$, $c=0.2\text{ N}\cdot\text{s/m}$, $k=10\text{ N/m}$, $F_0=10\text{ N}$, $\omega=\omega_n=10\text{ rad/s}$, $\beta=5$, $x_0=0\text{ m}$, $v_0=0\text{ m/s}$, $a_0=100\text{ m/s}^2$ 。从图2可以看出,振幅以负指数规律先以较快速度上升,然后缓慢上升到稳态值。

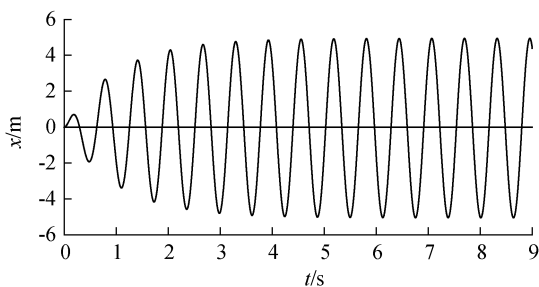


图2 有阻尼共振响应曲线

Fig. 2 Damped resonance response curve

2.3.2 无阻尼共振曲线 当阻尼比 $\xi=0$ 时,取初始位移、速度及激励力与有阻尼的状态相同,其共振响应 x 为

$$x = \frac{F_0}{2k}\omega_n t \sin\omega_n t$$

图3给出了一个相应的计算实例结果,其中 $m=0.1\text{ kg}$, $c=0\text{ N}\cdot\text{s/m}$, $k=10\text{ N/m}$, $F_0=$

10 N , $\omega=\omega_n=10\text{ rad/s}$, $x_0=0\text{ m}$, $v_0=0\text{ m/s}$, $a_0=100\text{ m/s}^2$ 。从图3可以看出,该理想响应振幅以线性规律从0起一直上升。

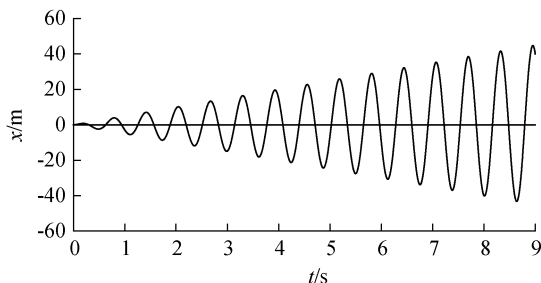


图3 无阻尼共振响应曲线

Fig. 3 Undamped resonance response curve

2.3.3 无阻尼振动的拍振现象 取初始位移及速度均为0,令激励力 $F=F_0\cos\omega t$,激励频率 ω 接近于 ω_n ,当 $\omega<\omega_n$ 时,振动响应 x 为

$$x = \frac{F_0}{k}\beta(\cos\omega t - \cos\omega_n t)$$

其中 $\beta=1/[1-(\omega/\omega_n)^2]$ 。

当 $\omega>\omega_n$ 时,振动响应 x 为

$$x = \frac{F_0}{k}\beta(\cos\omega_n t - \cos\omega t)$$

其中 $\beta=1/[(\omega/\omega_n)^2-1]$ 。

由于 $\cos\omega t - \cos\omega_n t = 2\sin((\omega_n + \omega)t/2) \cdot \sin((\omega_n - \omega)t/2)$,故振动响应 x 合成结果为高频简谐函数与低频简谐函数的乘积,出现时大时小的拍振现象。拍振的最大值等于或接近于 $2\frac{F_0}{k}\beta$ 。图4给出了一个实例系统的拍振计算结果,其中 $m=0.1\text{ kg}$, $c=0\text{ N}\cdot\text{s/m}$, $k=10\text{ N/m}$, $F_0=10\text{ N}$, $\omega_n=10\text{ rad/s}$, $x_0=0\text{ m}$, $v_0=0\text{ m/s}$, $\omega=9$ 。从图4可以看出,拍振现象非常明显。

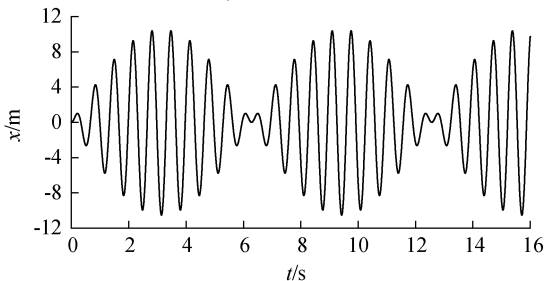


图4 拍振曲线

Fig. 4 Beat vibration curve

进一步研究发现,当激励频率 ω 与固有频率 ω_n 相差较大时,拍振现象不明显,但位移的最大值仍等于或接近于 $2 \frac{F_0}{k} \beta$.

3 库仑摩擦力对系统振动的影响

质量块在轨道上运行时,通常存在库仑摩擦力 K ,把振动微分方程①中的 $F(t)$ 换为激励力 $F_1(t)$ 和速度反向库仑摩擦力 K 的迭加,即可用杜哈米积分解析分析或用龙格-库塔法数值计算出库仑摩擦力对自由振动和强迫振动的影响.

3.1 库仑摩擦力对自由振动的影响

3.1.1 纯库仑摩擦力对自由振动的影响 通过大量的实例计算,并结合文献[11]可知,纯库仑摩擦力作用下的自由振动幅值以等差级数下降,幅值从极小到极大或从极大到极小均为以 ω_n 为角频率的余弦函数与常量之和,异侧相邻幅值下降量为摩擦力与刚度系数比值的 2 倍,同侧相邻幅值下降量为其 4 倍. 幅值下降到 3 倍以下后会进入平衡位置附近而停止不动.

图 5 给出一个用龙格-库塔法计算的纯库仑摩擦力对自由振动的影响实例,其中 $K=1.5 \text{ N}$, $m=0.1 \text{ kg}$, $k=10 \text{ N/m}$, $c=0 \text{ N}\cdot\text{s/m}$, $F_0=0 \text{ N}$, $\omega_n=10 \text{ rad/s}$, $x_0=4 \text{ m}$, $v_0=4 \text{ m/s}$, $F_K=1.5 \text{ N}$. 从图 5 可以看出,振动幅值以等差级数下降的规律明显.

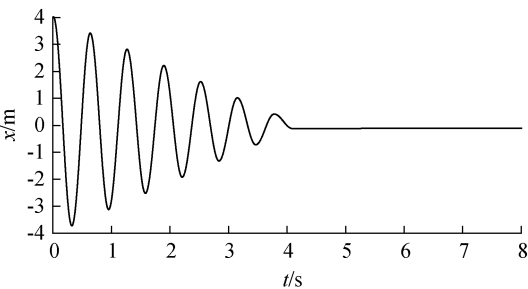


图 5 纯库仑摩擦力对自由振动的影响
Fig. 5 Effect of pure Coulomb friction on free vibration

3.1.2 库仑摩擦力对黏滞阻尼自由振动的影响 库仑摩擦力和黏滞阻尼均存在时,自由振动响应曲线亦分段光滑连续. 其振动幅值从极

小到极大或从极大到极小均为负指数函数和简谐函数的乘积与常量之和. 异侧相邻幅值下降量 $\varepsilon=(1+e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}})K/k+(1-e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}})x^*$, 其中 x^* 为前处位移幅值的绝对值.

峰值下降到适当值后,质量块即刻进入平衡位置附近而停止不动. 对于初始速度为 0 且位移小于 K/k 的情况,质量块则始终保持不动;而对于初始位移为 0 且速度小于 $\sqrt{3}K/\sqrt{mk}$ 的情况,质量块运动 1/4 周期后停止不动.

3.2 库仑摩擦力对强迫振动的影响

机械振动曲线大多表现为方向不断变化的振荡曲线. 从负位移幅值处向正位移幅值处运动时,库仑摩擦力为负常量;而从正位移幅值处向负位移幅值处运动时,库仑摩擦力为正常量. 使得系统位移与无库仑摩擦力位移有缩减差别量 ε . 据此,利用和函数积分的迭加性,用杜哈米积分分段推出了由刚度系数 k 、固有频率 ω_n 、阻尼比 ξ 、负位移幅值时间 t_0 和正位移幅值时间 t_1 所决定的库仑摩擦力 K 对位移差别的影响式为

$$x_0=-\left[1-e^{-\xi\omega_n(t-t_0)}(\cos\omega_d(t-t_0)+\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_d(t-t_0))\right]\frac{K}{k}$$
$$x_1=\left[1-e^{-\xi\omega_n(t-t_1)}(\cos\omega_d(t-t_1)+\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_d(t-t_1))\right]\frac{K}{k}$$

把获得的库仑摩擦力 K 对位移差别的影响式和其他激励力 $F_1(t)$ 引起的响应式合并,即可得到系统的最终响应式.

选取合适的时间步长 h ,用数值算法得到库仑摩擦力 $K=1.5 \text{ N}$ 对激励力 $F_1(t)=F_0\sin\omega t$ 的强迫振动影响曲线如图 6 所示.

由图 6 并结合库仑摩擦力 K 对位移差别的影响式可知,振动响应加速度的绝对值在位移幅值处产生由大到小的不连续变化,其差值为库仑摩擦力 K 与质量 m 比值的 2 倍. 经进一步

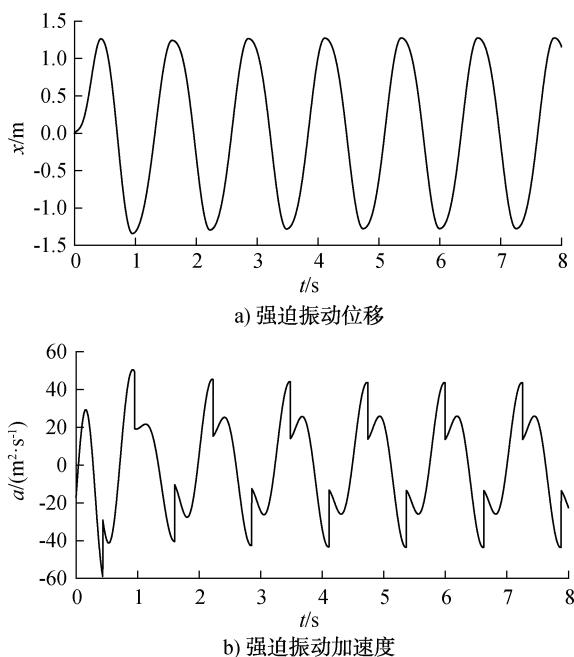


图6 库仑摩擦力对强迫振动的影响

Fig. 6 Effect of Coulomb friction on forced vibration

推导显示,区间内消耗的能量等于位移行程与库仑摩擦力的乘积。

当初始位移、初始速度、激励力幅值三者各小于一定值时,质量块运动到位移幅值处时,动摩擦力消失,而静摩擦力则由一个较小值自适应渐变到 K ,然后质量块开始返回,出现位移幅值处暂停现象。开始停歇时,加速度突变;停歇结束时,加速度连续。

通过数值计算,结合文献[12]的研究还发现,小库仑摩擦力抑制不住无黏滞阻尼共振响应不断增长的趋势,接近于激励力幅值 F_0 的大库仑摩擦力 K 才能使无黏滞阻尼共振响应幅值不超过稳态值,并可能出现位移幅值处暂停现象。

4 结语

本文通过对基于黏滞阻尼的单自由度振动响应及简谐激励响应的分析,得到了不同阻尼比状态下的振动位移的变化规律:在简谐激励的情况下,当初始位移及速度均为 0,无阻尼激励频率接近于固有频率时,振动系统将出现拍振现象;而小库仑摩擦力抑制不住无黏滞阻尼

共振响应的不断增长趋势;接近于激励力幅值的大库仑摩擦力才能使无黏滞阻尼共振响应幅值不超过稳态值,并可能出现位移幅值处暂停现象。这些结论为进行机械振动系统的阻尼与摩擦设计奠定了理论基础。

参考文献:

- [1] 镇斌,董杨.均质简支梁简化为单自由度系统条件研究[J].力学季刊,2020,41(4):61.
- [2] 刘贵杰,王新宝.基于单自由度强迫振动的直线波浪发电系统研究[J].机电工程,2017,14(7):782.
- [3] 党珍珍,李遇春,余燕清.连续梁在周期荷载下的动力稳定性简化分析方法[J].力学季刊,2019,40(3):74.
- [4] RAO M D. Recent applications of viscoelastic damping for noise control in automobiles and commercial airplanes[J]. Journal of Sound and Vibration, 2003, 262: 457.
- [5] 张衬英,杨小俊,葛东坡.振动特性参数对单自由度系统振动响应的影响[J].包装工程,2020(19):75.
- [6] ARMSTRONG-HÉLOUVRY B, DUPONT P, DE WIT C C. A survey of models, analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction[J]. Automatic, 1994, 30(7): 1083.
- [7] 李得洋,丁旺才,卫晓娟,等.单自由度含干摩擦碰振系统相邻周期运动转迁规律分析[J].振动与冲击,2020,39(22):57.
- [8] 丁千,翟红梅.机械系统摩擦动力学研究进展[J].力学进展,2013,3(1):112.
- [9] WANG J, SHEN Y J, YANG S P, et al. Dynamic response of a piecewise linear single-degree-of-freedom oscillator with fractional-order derivative[J]. Journal of Low Frequency Noise Vibration and Active Control, 2021, 40(1): 72.
- [10] 贾启芬,刘习军.理论力学[M].北京:机械工业出版社,2012:342-364.
- [11] HIBBELER R C. 工程力学(动力学)[M].北京:高等教育出版社,2004:605-639.
- [12] 杨义勇,金德闻.机械系统动力学[M].北京:

- 清华大学出版社,2009:134-168.
- [13] 张梅军,曹勤. 工程机械动力学[M]. 北京:国防工业出版社,2012:6-30.
- [14] CHEN H B, DUAN S, TANG Y L, et al. Global dynamics of a mechanical system with dry friction [J]. Journal of Differential Equations, 2018, 265: 5490.
- [15] 田红亮,陈谦. 单自由度系统[J]. 三峡大学学报(自然科学版), 2019, 41(5): 103.
- [16] WU Z Y, LIU H Z, LIU L L, et al. Identification of nonlinear viscous damping and Coulomb friction from the free response data [J]. Journal of Sound and Vibration, 2007, 304(1/2): 407.
- [17] 魏井福,张小龙. 库仑摩擦对自由振动特性的影响分析[J]. 机械工程师, 2010, 42(8): 52.
- [18] 艾金婷,富立,郑玉. 库仑摩擦对机械振动的影响[J]. 长春理工大学学报, 2014, 27(2): 49.
- [19] FEENY B F, LIANG J W. A decrement method for the simultaneous estimation of Coulomb and internal friction [J]. Journal of Sound and Vibration, 1996, 195: 149.
- [20] LEE S K. Closed-form solutions to free vibration response of single degree of freedom systems with Coulomb friction [J]. Journal of the Computational Structural Engineering Institute of Korea, 2020, 33(1): 9.
- [21] 张艳龙,王丽,唐斌斌. 含改进 LuGre 动摩擦的非光滑振动系统的动力学分析[J]. 振动与冲击, 2018, 37(6): 212.
- (上接第 109 页)
- [31] 武亭羽,王成军,王雪,等. 亚马逊莓 (*Euterpe oleracea*) 美白相关成分和作用研究现状[J]. 化工进展, 2020, 39(S2): 285.
- [32] 郭立群,王敏. 化妆品功效评价(VII): 细胞生物学在化妆品功效评价中的应用[J]. 日用化学工业, 2018, 48(7): 371.
- [33] SONG X J, ZHOU C X, WU Y. Reconstruction of 3D skin model and its application in evaluation the efficacy of cosmetic raw materials to be used as active ingredients [J]. China Surfactant Detergent & Cosmetics, 2017, 47(11): 633.
- [34] 李潇,张晓娥,卢永波,等. 化妆品功效评价(VIII): 3D 皮肤模型在化妆品功效评价中的应用[J]. 日用化学工业, 2018, 48(9): 489.
- [35] NAKAMURA M, HAARMANN-STEMMANN T, KRUTMANN J, et al. Alternative test models for skin ageing research [J]. Experimental Dermatology, 2018, 27(5): 495.
- [36] 方兆华. 基因芯片技术在化妆品中的应用[J]. 日用化学工业, 2012, 35(1): 24.
- [37] 颜薇. 应用基因芯片技术对国人皮肤光老化基因差异表达的研究[D]. 北京:中国协和医科大学, 2008.